

DENBORAZKO SERIEEN AZTERKETA:
AURREATE METODO BATZUK



ANALISIS DE SERIES TEMPORALES:
ALGUNAS TECNICAS DE PREDICCION

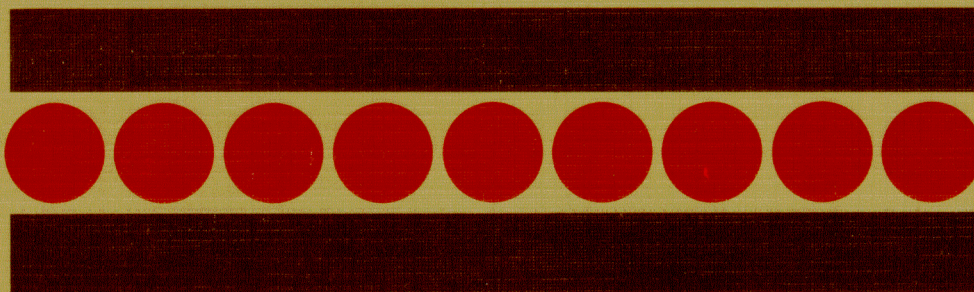


ANALYSE DES SERIES TEMPORALES:
QUELQUES TECHNIQUES DE PREDICTION



ANALYSIS OF TIME SERIES:
SOME PREDICTION TECHNIQUES

I. GALLASTEGI



Lanketa / Elaboración:

Euskal Estatistika-Erakundea /
Instituto Vasco de Estadística

Argitalpena / Edición:

Euskal Estatistika-Erakundea /
Instituto Vasco de Estadística
C/ Dato 14-16 - 01005 Vitoria-Gasteiz

Botaldia / Tirada:

1.500 ejemplares
XII-1987

© **Euskadiko K.A.ko Administrazioa**
Administración de la C.A. de Euskadi

Fotokonposaketarako tratamendu informatikoa:
Tratamiento informático de fotocomposición:

Fotocomposición RALI, S.A.
Particular de Costa, 12-14 - BILBAO

Inprimaketa eta Koadernaketa:
Impresión y Encuadernación:

Itxaropena, S.A.
Araba kalea, 45 - Zarautz

Lege-gordailua / Depósito legal: S.S. 35/88

ISBN: 84-7542-127-10 Obra completa
ISBN: 84-7749-013-9

NAZIOARTEKO ESTATISTIKA
MINTEGIA EUSKADIN

1986

SEMINARIO INTERNACIONAL
DE ESTADISTICA EN EUSKADI

**DENBORAZKO SERIEEN AZTERKETA:
AURREATE METODO BATZUK**

•

**ANALISIS DE SERIES TEMPORALES:
ALGUNAS TECNICAS DE PREDICCION**

•

**ANALYSE DES SERIES TEMPORALES:
QUELQUES TECHNIQUES DE PREDICTION**

•

**ANALYSIS OF TIME SERIES:
SOME PREDICTION TECHNIQUES**

I. GALLASTEGI

KOADERNOA **12** CUADERNO



AURKEZPENA

Estatistikako Mintegi Internazionalak sustatzean, hainbat xederekin bete nahi luke Euskal Estatistika Erakundeak hala nola:

- Unibertsitatearekiko eta, Estatistika Sailarekiko lankidetzaz bultzatu.
- Funtzionari, irakasle, ikasle eta estatistikaren alorrean interesaturik leudekeen guztien birziklapen profesionala erraztu.
- Estatistikako alorrean eta mundu-mailan irakasle prestu eta abangoardiako ikerlari diren pertsonaiak Euskadira ekarri, guzti horrek zuzeneko harremanei eta esperientzien eza-gupenei dagokienez suposatzen duen ondorio positiboarekin.

Iharduketa osagarri bezala eta interesaturik leudekeen ahalik eta pertsona eta Erakunde gehienetara iristearren, Ikastaro hauetako txostenak argitaratzea erabaki da, beti ere txostenemailearen jatorrizko hizkuntza errespetatuz, horrela gure Herrian gai honi buruzko ezagutza zabaltzen laguntzeko asmoarekin.

Vitoria-Gasteiz, 1987ko abendua
JOSE LUIS NARVAIZA SOLIS
Zuzendari Orokorra

PRESENTACION

Al promover los Seminarios Internacionales de Estadística, el Instituto Vasco de Estadística pretende cubrir varios objetivos:

- Fomentar la colaboración con la Universidad y en especial con los Departamentos de Estadística.
- Facilitar el reciclaje profesional de funcionarios, profesores, alumnos y cuantos puedan estar interesados en el campo estadístico.
- Traer a Euskadi a ilustres profesores e investigadores de vanguardia en materia estadística, a nivel mundial, con el consiguiente efecto positivo en cuanto a la relación directa y conocimiento de experiencias.

Como actuación complementaria y para llegar al mayor número posible de personas e Instituciones interesadas, se ha decidido publicar las ponencias de estos Cursos, respetando en todo caso la lengua original del ponente, para contribuir así a acrecentar el conocimiento sobre esta materia en nuestro País.

Vitoria-Gasteiz, diciembre de 1987
JOSE LUIS NARVAIZA SOLIS
Director General

PRESENTATION

L'Institut Basque de la Statistique se propose d'atteindre plusieurs objectifs par la promotion des Séminaires Internationaux de la Statistique:

- Encourager la collaboration avec l'Université et spécialement avec les départements de la statistique.
- Faciliter le recyclage professionnel des fonctionnaires, professeurs, élèves, et tous ceux qui pourraient être intéressés par la statistique.
- Inviter en Euskadi des professeurs mondialement renommés et des chercheurs de premier ordre en matière de Statistique avec tout ce que cela pourrait entraîner comme avantage dans les rapports et l'échange d'expériences.

En outre, il a été décidé de publier les exposés de ces rencontres afin d'atteindre le plus grand nombre de personnes et d'institutions intéressées, et pour contribuer ainsi à développer dans notre pays les connaissances sur cette matière. Dans chaque cas la langue d'origine du conférencier sera respectée.

Vitoria-Gasteiz, décembre 1987

JOSE LUIS NARVAIZA SOLIS
Directeur Général

PRESENTATION

In promoting the International Seminars on Statistics, the Basque Statistical Office is attempting to achieve a number of objectives:

- Encourage joint working with the Basque University and, in particular, with its Department of Statistics.
- Facilitate the in-training of civil servants, teachers and students and of all those interested in the field on statistics.
- Bring to Euskadi distinguished academics and researchers in the front line of statistics work, at a world-wide level, with all the benefits that this will bring through direct contacts and the interchange of experiences and ideas.

As an additional step it has been decided to publish in advance the papers to be presented at these courses, respecting the native language of the speaker, in each case. This is in order that as many interested people and institutions as possible are made aware. In this way we hope to contribute to the growth and awareness concerning this topic in our country.

Vitoria-Gasteiz, december, 1987

JOSE LUIS NARVAIZA SOLIS
Director General

SARRERA

Liburu honek, Euskal Estatistika-Erakundeak eta Euskal Herriko Unibertsitateak antolatutako IV. Nazioarteko Estatistika Mintegien barnean I. Gallastegik “Análisis de series temporales. Algunas técnicas de predicción” gaiari buruz emandako ikastaroa laburbiltzen du. Mintegi honek kontatzen du baita Kanadan Director of the Methods Division of Census and Household Survey den R. Platek-en partaidetzarekin, “Methodology and treatment of the non-response” gaiarekin eta orobat I.A.S.S.eko Lehendakaria (1985-87) eta Michigan-eko Unibertsitateko L. Kish-en partaidetzarekin ere, “Operaciones estadísticas por muestreo” gaiarekin.

INTRODUCCION

Este libro resume el curso que sobre “Análisis de series temporales. Algunas técnicas de predicción”, ha impartido I. Gallastegi dentro del IV Seminario Internacional de Estadística en Euskadi, organizado por el Instituto Vasco de Estadística y la Universidad del País Vasco. Este IV Seminario cuenta además con la participación de R. Platek, Director of the Methods Division of Census and Household Survey en Statistics Canada, con el tema “Methodology and treatment of the non-response” y L. Kish, Presidente del I.A.S.S. (1985-1987) y de la Universidad de Michigan con un curso sobre “Operaciones estadísticas por muestreo”.

INTRODUCTION

Ce livre résume le cours donné par I. Gallastegi sur “Análisis de series temporales. Algunas técnicas de predicción”, au sein du IV Séminaire International de Statistique à Euskadi, organisé par l’Institut Basque de Statistique et l’Université du Pays Basque. Ce IV Séminaire compte, en plus, avec la participation de R. Platek, Director of the Methods Division of Census and Household Survey à Statistics Canada, sur le sujet “Methodology and treatment of the non response” et L. Kish, Président de l’I.A.S.S. (1985-1987) et de l’Université de Michigan avec un cours sur “Operaciones estadísticas por muestreo”.

INTRODUCTION

This book summarizes the course on “Análisis de series temporales. Algunas técnicas de predicción”, which was presented by I. Gallastegi during the 4th International Statistical Seminar in Euskadi, organised by the Basque Statistical Institute and the University of the Basque Country. The 4th Seminar also included a paper by R. Platek, Director of the Methods Division of Census and Household Survey of Statistics Canada, on “Methodology and treatment of the non-response”, and a course by L. Kish, University of Michigan and President of the I.A.S.S. (1985-1987), on “Operaciones estadísticas por muestreo”.

BIOGRAFIA

Inmaculada Gallastegi, Euskal Herriko Unibertsitateko Ekonometriako Katedraduna da, Unibertsitate hone-tatik Ekonoman Dokorea da eta Londreseko (London Scool Economics) Unibertsitatetik Ekonometrian eta Matematika Ekonomikoan Masterra. Denborazko serieen eta beste gai ekonomiko batzuei buruz anitz lan argitaratu ditu. Gaur egun, Euskal Herriko Unibertsitatean Ekonomia Publiko Ikastegiaren bazkidea da ere.

Inmaculada Gallastegi es Catedrática de Econometría de la Universidad del País Vasco, doctora en Economía por esta Universidad y Master en Econometría y Economía Matemática por la Universidad de Londres (London School Economics). Ha publicado diversos trabajos en relación con el análisis de series temporales y otros temas económicos. En la actualidad, es además miembro del Instituto de Economía Pública de la Universidad del País Vasco.

Inmaculada Gallastegi, est professeur d'Econométrie de l'Université du Pays Basque, doctoresse en Economie par cette Université et Master en Econométrie et Economie Mathématique par l'Université de Londres (London School Economics). Elle a publié plusieurs travaux en relation avec l'analyse des séries temporaires et d'autres sujets économiques. Actuellement, elle est en plus membre de l'Institut d'Economie Publique de l'Université du Pays Basque.

Inmaculada Gallastegi is a professor of Econometrics at the Basque Country University, she has a doctorate in Economy from the same university and a master's degree in Econometrics and Mathematical Economy from London University (London School of Economics). She has published various works related to the analysis of time series and other economic themes. At the moment she is also a member of the Basque University's Institute of Public Economy.

DENBORAZKO SERIEEN AZTERKETA. AURRESATE METODO BATZUK

I. Gallastegi

LABURPENA

Ikastaroaren helburua ikaslea serie kronologikoen azterketan oinarritutako eredu dinamikoen eraikuntza-ko teknikan sartzea da. Sarrera labur baten ondoren, hurbilpen honetarako oinarritzko elementu teorikoak aurkezten dira, estazionalitatearekin eta estazionalitatearik gabeko serieen aldagai bakarreko analisisan zentratuz. Ereduen eraikuntzako prozedura, jarraian xehekatzen den bezala, adibide baten bidez argitzen da. Eta ikastaroaren azken parte, aldagai anitzeko analisiari dagokio, atentzioa eskuharmeneko analisisan eta transferentzi funtzioko ereduaren eraikuntzan zentratuz. Bi kasuetan, jarraitu beharreko prozeduraren argibideak aurkezten dira.



AURKIBIDEA

0. Sarrera	17
1. Osagai ez obserbagarrien ereduak	21
2. ARIMA ereduak	23
2.1. Prozesu estatistiko geldikorrak	23
2.2. ARMA ereduak	26
2.2.1. Geldirunetako baldintzak	26
2.2.2. Autokoerlazio funtzioa	28
2.2.3. Autokoerlazio funtzio partziala. (f.a.p.)	30
2.3. ARMA ereduaren eraikitza datuetan oinarriturik	33
2.3.1. Ereduaren identifikazioa	33
2.3.2. Ereduaren estimazioa	35
2.3.3. Kontrasketak	36
2.3.4. Aurresatea	37
3. Urtesasoiko egitura duten serieak	39
3.1. Ilustrazioa	41
4. Aldagai anitzeko analisia	59
5. Transferentzi funtzioen ereduak	61
6. Interbentzioko analisia	63
6.1. Interbentzioko analisiaren ilustrazioa ..	65
7. Aldagai arteko eredu dinamikoak	79
8. Transferentzi funtzioen ilustrazioa	81
8.1. C.E.E.-rako aldaera bakarrako ereduak ..	81
8.2. Aurrezuriketa eta koerlazio gurutzatuak ..	89
8.3. Transferentzi funtzioa	89
I. Eranskina - Bibliografia	99
II. Eranskina - Softwarea	101

INDICE

0. Introducción	17
1. Modelos de componentes no observables	21
2. Modelos ARIMA	23
2.1. Procesos estocásticos estacionarios	23
2.2. Modelos ARMA	26
2.2.1. Condiciones de estacionariedad	26
2.2.2. Función de autocorrelación	28
2.2.3. Función de autocorrelación parcial (f.a.p.)	30
2.3. Construcción de modelos ARMA a partir de los datos	33
2.3.1. Identificación de modelos	33
2.3.2. Estimación de modelos	35
2.3.3. Contrastes	36
2.3.4. Predicción	37
3. Series con estructura estacional	39
3.1. Ilustración	41
4. Análisis multivariante	59
5. Modelos de función de transferencia	61
6. Análisis de intervención	63
6.1. Ilustración de análisis de intervención ..	65
7. Modelos dinámicos entre variables	79
8. Ilustración de función de transferencia	81
8.1. Modelo univariante para CEE	81
8.2. Preblanqueo y correlación cruzada	89
8.3. Función de transferencia	89
Anexo I - Bibliografía	99
Anexo II - Software	101

**ANALISIS DE SERIES TEMPORALES.
ALGUNAS TECNICAS DE PREDICCION**

0. INTRODUCCION

El análisis de series temporales tiene como objetivo estudiar el comportamiento de una (o varias) variables a lo largo de distintos periodos de tiempo. El hecho de que las observaciones de dichas variables se generen a lo largo del tiempo y se ordenen en relación con el mismo de una manera natural es la característica que sirve de base a este análisis.

El instrumento a utilizar es normalmente un *modelo* que permita reproducir el comportamiento de la variable de interés. Se afirma habitualmente que un modelo no es más que una representación simplificada de la realidad. El grado de simplificación introducido en su formulación es central para establecer los usos del mismo. De entre éstos, podemos destacar la utilización de un modelo para predicción y para simulación.

Entenderemos por *predicción* la anticipación de valores desconocidos de una variable, y por *simulación* la generación de valores de una variable en condiciones distintas a las observadas.

Independientemente de la forma que un modelo adopte, la información que en el mismo se incorpora determina las preguntas a las que puede intentarse responder con él. Si la pregunta es: "dado lo que ha venido sucediendo, ¿qué podemos esperar que suceda en el futuro?", el objetivo es predicción. Si la pregunta es: "¿por qué sucede lo que sucede?", se busca en un modelo la capacidad de explicar un fenómeno dado. Y si la pregunta fuera: "¿qué hubiera sucedido si las circunstancias hubieran sido otras?", tendríamos como objetivo la simulación. No todos los modelos permiten responder a los tres tipos de preguntas: la información incor-

porada en la construcción del modelo determinará no sólo qué preguntas pueden responderse, sino también el grado de complejidad esperable en la respuesta.

Estas consideraciones pueden parecer relativamente independientes del hecho de que las observaciones de las variables estén ordenadas en el tiempo. Un sencillo ejemplo nos ayudará a encontrar la relación entre ambas cosas.

Supongamos que nos interesa estudiar el comportamiento del precio de mercado de un producto, y que observamos diez valores de dicho precio, que resultan ser los siguientes:

11 15 7 9 20 12 10 14 22 19

Esta información nos será de muy poca utilidad mientras no sepamos de qué manera ordenarla. Las mismas observaciones cobrarán un sentido distinto si se nos dice que corresponden a precios observados en un momento dado en distintos lugares geográficos, que si se nos dice que se han tomado en un mismo lugar en distintos periodos de tiempo. En este último caso, queremos saber cómo se ordenan cronológicamente las observaciones de más antigua a más reciente.

Supongamos que las observaciones se ordenan a lo largo del tiempo de la siguiente manera:

(1) 7 9 10 11 12 14 15 19 20 22

Es evidente que la información que los datos proporcionan es distinta una vez ordenados; y sería a su vez distinta si se ordenaran así:

(2) 7 10 11 12 9 15 14 19 22 20

o así:

(3) 20 22 19 15 12 14 11 10 7 9

En cada uno de estos casos, ordenar los datos a lo largo del tiempo proporciona una información extra: podemos saber si el precio ha crecido o disminuido. Si ahora nos preguntaran qué esperamos que suceda con el precio del producto posterior a la última observación, en la mayor parte de los casos la respuesta sería “aumentar” si la sucesión de valores fuera (1) y “disminuir” si la sucesión de valores fuera (3). Esto es, conocer el orden en que los valores se han generado nos ayuda a *predecir* lo que puede suceder.

Por otro lado, si la pregunta fuera: “¿por qué los precios han evolucionado de esta forma?”, pocos de nosotros estaríamos dispuestos a adelantar una respuesta sin disponer de más información.

Imaginemos que podemos disponer simultáneamente de información sobre las toneladas de producto que se han producido en los mismos periodos de tiempo. Ordenados cronológicamente, los dos conjuntos de observaciones son:

Precios: 7 9 10 11 12 14 15 19 20 22
Producción: 300 287 269 272 250 260 235 220 200 210

Es fácil observar que existe una relación inversa entre ambas series de datos. Si volviéramos a formular la pregunta anterior, podríamos esperar muchas respuestas del tipo: “El decrecimiento de la producción está empujando en el mercado los precios al alza”. Pero también podríamos tener esta respuesta: “El crecimiento de los precios provoca una disminución de la demanda y por lo tanto de la producción”. En ambos casos, se establece una relación de causalidad entre las variables. En el primer caso, la producción determina el precio, mientras que en el segundo el precio determina la producción. Elegir entre ambas respuestas exigiría más información sobre el fenómeno observado. Sin embargo, también aquí saber a qué periodo de tiempo corresponden las observaciones puede ayudar. Si se nos dijera que las dos series de observaciones no son contemporáneas, sino que la segunda empieza dos periodos antes que la primera, podríamos observar que el decrecimiento de la producción antecede a la subida de los precios, y la primera de las explicaciones ofrecidas puede ganar adeptos. La relación dinámica entre variables puede ayudar a explicar fenómenos observados.

Si aceptamos la primera de las explicaciones señaladas, podríamos proponer un modelo del tipo:

$$\text{Precio} = f(\text{producción})$$

que sugiere que para determinar el precio es preciso saber qué ha pasado con la producción. Si ahora se nos dijera que la producción va a aumentar en el próximo periodo hasta 280, la mayor parte de nosotros predeciríamos un decrecimiento del precio para dos periodos más adelante.

Igualmente, ahora estaríamos dispuestos a responder a la pregunta: ¿qué evolución hubieran seguido los precios si la producción, en lugar de disminuir, hubiera aumentado a lo largo de todos los periodos?

El ejemplo anterior pretendía ilustrar varios puntos:

- 1) Que para obtener respuestas cualificadas de un modelo es preciso incorporar al mismo información relevante.
- 2) Que saber cuál es la evolución en el tiempo de una variable puede ayudar a predecir su valor en otro periodo futuro.
- 3) Que la predicción que se haga no es independiente del conjunto de información que se utilice.

Es evidente que cuanto más complejo sea un modelo más uso podrá hacerse de él. Es igualmente evidente que el grado de complejidad está en relación directa con el coste de su construcción (costo en términos de información, de cálculo, etc.). Por último, debería ser evidente que pueden construirse modelos distintos para distintos usos, a partir de un mismo fenómeno observado.

Otro aspecto que debe mencionarse en esta introducción es el de la información “a priori” incorporada en un modelo. En economía es habitual que las proposiciones de la teoría económica sean la base de la construcción de modelos. El modelo teórico que incorpora las proposiciones de la teoría es contrastado con los datos observados. Si éstos son compatibles con el modelo, se acepta la teoría como explicación adecuada del fenómeno observado, y puede usarse el modelo estimado para predecir y simular. De lo contrario, se modifica la teoría para hacerla compatible con la observación.

Podría, sin embargo, pensarse en una aproximación distinta: Se construye un modelo que sea compatible con los datos, únicamente a partir de la información de éstos, y posteriormente se busca una explicación teórica compatible con el modelo.

Normalmente, la relación entre teoría y observación trabaja en las dos direcciones. Sin embargo, el punto de partida para la construcción de un modelo es distinto en uno y otro caso. En muchas ocasiones, también es distinto el objetivo para el cual se construye un modelo. Si se trata únicamente de predecir, es posible que no interese mucho la explicación del fenómeno subyacente. Si se trata de explicar, por el contrario, es normal que exista una hipótesis previa del comportamiento de las variables.

El análisis de series temporales aborda la construcción de modelos a partir únicamente de los datos, lo que no impide que, una vez construidos, los modelos puedan ser utilizados para explicar fenómenos. Tanto si se trata de una sola variable como si se toman varias simultáneamente, el objetivo central será construir modelos que recojan adecuadamente la estructura temporal del comportamiento de la o las variables.

Análisis univariante

De esta manera se denota el análisis de series temporales que se ocupa de analizar una única variable en su evolución temporal y constituye la base de la mayor parte de los métodos utilizados.

En adelante, denotaremos por X_t la variable a analizar. El subíndice t indica el período de tiempo en el que se observa la variable. Supondremos que las observaciones se miden en determinados momentos de tiempo, igualmente espaciados: un día, un mes, un trimestre, un año. Por lo tanto, y de manera general:

$$t = -\infty, \dots, -1, 0, 1, 2, \dots, \infty$$

El valor de X_t puede denotar el valor observado en el momento t (por ejemplo: el precio de un producto) o el valor obtenido por la variable desde la última medición (por ejemplo: producción en el año t).

La información estadística precisa para un análisis univariante consiste en una muestra de sucesivos valores de una variable, que denotaremos $(X_1, X_2, \dots, X_T)$, siendo T el número de períodos que abarca nuestra muestra. El subíndice 1 indicará siempre la primera observación de la muestra, siendo por lo tanto T el tamaño muestral.

El análisis univariante resulta muy poco costoso en términos de información: sólo una variable debe ser observada. Por la misma razón, el objetivo de dicho análisis no puede ser excesivamente ambicioso. En general, pueden abordarse dos objetivos básicos:

- 1) Describir las características de la serie.
- 2) Predecir futuros valores de la variable.

Ambos objetivos pueden conseguirse a muy distintos niveles. Es evidente que, dada la muestra, calcular la media y la desviación típica de las observaciones supone describir características de la serie. De la misma manera, podemos predecir que los valores futuros de la variable van a ser iguales al último valor observado. Sin embargo, en ninguno de los dos casos se usa la información muestral de una manera sistemática.

El uso sistemático de la información muestral pasa normalmente por la formulación de modelos que puedan describir la evolución de la serie.

Los modelos usados en el análisis de series temporales se clasifican en dos grandes grupos: Modelos de componentes no observables y modelos ARIMA. Los primeros tratan de representar la serie como un agregado de distintos componentes, mientras que los segundos tratan de obtener una representación de la serie en términos de la interrelación temporal de sus elementos. Si bien ambos tipos de modelos pueden ser extraordinariamente próximos (como trataremos de hacer ver), el punto de partida para su construcción es muy distinto.

1. MODELOS DE COMPONENTES NO OBSERVABLES

Estos modelos han recibido mucha atención en la literatura estadística a lo largo de un gran número de años, y continúan usándose en la actualidad. Si bien no constituyen el objeto de este curso, conviene señalar sus características fundamentales.

Un modelo de esta clase supone que una serie X_t puede descomponerse de alguna de las maneras siguientes:

$$X_t = T_t S_t e_t$$

$$X_t = T_t + S_t + e_t$$

El primer modelo multiplicativo puede convertirse en aditivo a través de una transformación logarítmica.

Los elementos T_t , S_t y e_t son los componentes de la serie que se identifican con los siguientes conceptos:

— El componente T_t o tendencia representa un movimiento lento a largo plazo, y puede tomarse como el que determina la tasa de cambio básica de los valores de la variable.

— El componente S_t o estacionalidad representa un movimiento cíclico que se superpone a la tendencia y recoge las fluctuaciones en la serie a lo largo de un año.

— El componente e_t o irregular se define, en general, como residuo, y recoge las variaciones no sistemáticas en la serie.

Los modelos de esta clase tratan, pues, de recoger regularidades en el comportamiento de una variable a lo largo del tiempo. El punto de partida para su construcción es la existencia de dichas regularidades, cuya definición es relativamente arbi-

traria. La periodicidad de los datos define lo que debe considerarse como tendencia: En series largas, es posible identificar un cuarto componente, llamado ciclo, distinto de la tendencia. En series no tan largas, sin embargo, las componentes de tendencia y ciclo se confunden. Por otro lado, series cuyo período de medición es anual no permiten identificar la componente estacional. La definición de las componentes que forman la serie a estudiar depende, pues, de la longitud y período de medida de la misma.

Modelos de esta clase son la base de la obtención de series desestacionalizadas publicadas por las oficinas estadísticas de todo el mundo. Los procedimientos para tratar la serie y aislar sus componentes han sido extensamente desarrollados: El llamado procedimiento X-11 del Bureau of the Census Americano es, quizá, el mejor conocido. Las referencias (4), (5), (6) y (8) permiten obtener información detallada de esta clase de procedimientos. La aproximación habitual para estimar la tendencia y la estacionalidad se basa en el alisamiento de la serie a base de medias móviles (promedios) acumulados y cuya longitud se elige en función de la componente que se quiera determinar.

En general, las componentes de tendencia y estacionalidad se consideran deterministas y provocadas por causas diferentes y la componente irregular puede ser representada por un proceso estacionario no determinista. Es posible proponer modelos estocásticos más complejos en este mismo contexto (ver p. ej. (6)), pero normalmente no son utilizados.

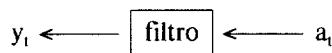
Asimismo, muchos de los métodos de predicción más conocidos están basados en este modelo. La noción de que una serie está formada local-

mente por la suma de nivel, tendencia y residuo es la base de los métodos de alisamiento exponencial. Añadir a éstos, aditiva o multiplicativamente, una componente estacional permite predecir adecuadamente el comportamiento de series en las que la estacionalidad produce cambios de nivel importan-

tes. La simplicidad de estos métodos y la posibilidad de automatizarlos explica el gran uso de los mismos cuando es preciso predecir los valores de un gran número de series. Las referencias (1) a (4) proporcionan un buen punto de partida para su estudio.

2. MODELOS ARIMA

Los que aquí llamamos modelos ARIMA suponen que una serie puede ser generada por la suma de variables aleatorias independientes entre sí. La serie observada se considera el resultado de pasar a una sucesión de variables aleatorias, que llamaremos a_t , a través de un filtro. En términos gráficos:



El filtro constituye el modelo. Distintas series son generadas por filtros distintos, a partir de un conjunto básico de variables a_t .

Determinar la forma y las características del filtro que haya podido generar la variable observada es el objetivo del proceso de construcción de un modelo.

Puesto que puede pensarse en una multitud de posibles filtros, es preciso limitar el conjunto de elección. En lo sucesivo, nos referiremos únicamente a filtros de la forma:

$$\frac{\theta(B)}{\psi(B)}$$

con: $\theta(B) = \theta_0 + \theta_1 B + \dots + \theta_q B^q$

$$\psi(B) = \psi_0 + \psi_1 B + \dots + \psi_p B^p$$

siendo B el operador de retardos que, aplicado sobre cualquier variable en el período t , da como resultado el valor de la misma variable en el período anterior, $t-1$:

Esto es:

$$BX_t = X_{t-1}$$

e, igualmente,

$$B^2 X_t = X_{t-2}$$

$$B^s X_t = X_{t-s}$$

El modelo básico a estudiar es, pues, de la forma

$$X_t = \frac{\theta(B)}{\psi(B)} a_t$$

que, generalmente, se escribe:

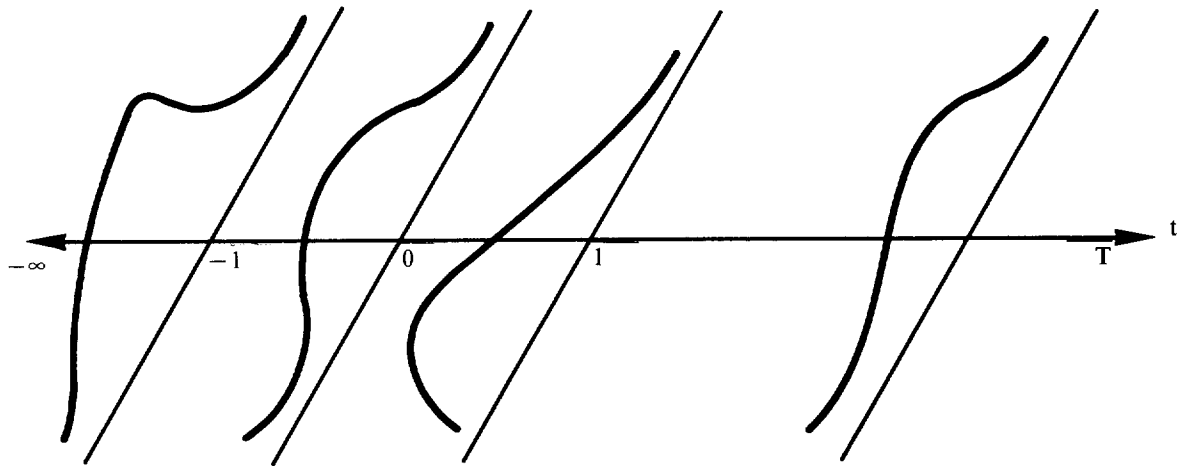
$$\psi(B) X_t = \theta(B) a_t$$

Trataremos, en lo que sigue, de explicitar las razones que justifican la elección de modelos de esta clase para representar series temporales observadas. La justificación pasa por establecer un marco teórico, el correspondiente a procesos estocásticos, y obtener los resultados relevantes dentro de dicho marco. Dichos resultados permitirán conocer las características de ciertas clases de procesos y sugerirán una forma de construcción de modelos, a la vez que establecerán un esquema general en el que pueden inscribirse tanto los modelos de componentes no observables como los modelos ARIMA.

2.1. Procesos estocásticos estacionarios

Definiremos un proceso estocástico como una sucesión de variables aleatorias X_t ordenadas según el subíndice t , que siguen una ley de probabilidad conjunta.

Si el subíndice t lo identificamos con el tiempo, el proceso $\{X_t\}$ $t = -\infty, -1, 0, 1, \infty$ genera una variable aleatoria distinta para cada valor de t . Gráficamente, podemos representar un proceso de la siguiente manera:



La función de probabilidad del proceso establece no sólo la distribución de cada una de las variables aleatorias X_t , sino también las características de la relación entre ellas; esto es, la forma en la que el proceso evoluciona a lo largo del tiempo.

Una *realización* de un proceso es una muestra de tamaño uno de cada una de las variables aleatorias que componen el proceso:

$$(X_{-\infty} \dots X_{-1} X_0 X_1 \dots X_{\infty})$$

Una serie temporal de observaciones de la variable X , $(X_1 X_2 \dots X_T)$, puede por lo tanto considerarse como parte de una realización del proceso. Cada uno de los valores de la serie constituye una muestra de tamaño uno de las variables observadas.

Por poner un ejemplo, consideremos la sucesión de precios ordenada que se ha mencionado en la introducción. Supongamos que las observaciones corresponden a períodos anuales entre 1975 y 1984. La sucesión (1) puede entonces considerarse así: El valor 7 representa una observación extraída del conjunto de precios posibles en 1975, etc.

Es importante notar en este punto, que aunque ampliemos nuestra serie hasta cubrir los años 1960 a 1986, cada uno de los precios observados seguirá constituyendo una muestra única de los precios posibles en un año. El tamaño muestral de la

serie, T , representa el conjunto de variables aleatorias del proceso que han podido observarse, pero no tiene ninguna relación con el conjunto de posibles valores de la variable para cada valor de t . Por lo tanto, aumentar el tamaño muestral no aumen-

tará la información que obtenemos respecto de cada una de las poblaciones X_t .

Supongamos que cada variable aleatoria sigue una ley de probabilidad distinta que, para simplificar, supondremos normal

$$X_t \sim N(\mu_t, \sigma_t^2)$$

Los parámetros μ y σ^2 de la distribución cambian para cada valor de t . En estas condiciones, aumentar el tamaño muestral no ayuda en nada a inferir los valores de μ_t y σ_t^2 para un t dado. En efecto, tener información sobre los precios en 1986 no añade información útil para conocer la población de posibles precios en 1954, si la distribución de éstos es distinta de la de los precios en todos los demás años.

Sin embargo, sí es posible inferir, a partir de la información de una serie, las características de la ley de probabilidad conjunta en situaciones más restringidas.

El caso extremo es aquel en el que las sucesivas variables aleatorias del proceso son independientes entre sí y siguen la misma distribución, por ejemplo:

$$X_t \sim N(\mu, \sigma^2)$$

En esta situación, puede tratarse a la serie $(X_1 \dots X_T)$ como una muestra aleatoria de tamaño T de una única distribución.

Existen otros casos de interés, en los que se supone que los parámetros cambian suavemente, según alguna ley conocida (ver, p. ej.: (3)).

La clase de *procesos estacionarios* es particularmente importante. Diremos que un proceso es estacionario en sentido estricto si su función de distribución conjunta es tal que

$$f(X_{t_1} X_{t_2} \dots X_{t_n}) = f(X_{t_1+m} X_{t_2+m} \dots X_{t_n+m}) \quad \forall n, m$$

Esto significa que el mecanismo generador del proceso es independiente del tiempo; o, lo que es lo mismo, que sea cual sea el momento de tiempo en que se observe el proceso, su evolución será la misma.

Para procesos lineales, la información básica está recogida en los dos primeros momentos de la distribución, media y varianzas y covarianzas. Si definimos estos momentos:

$$\mu_t = E(X_t)$$

$$\gamma_{t,s} = E[(X_t - \mu_t)(X_{t-s} - \mu_{t-s})]$$

las condiciones menos restrictivas de *estacionariedad débil* o en covarianza son las siguientes:

$$(1) \quad E(X_t) = \mu \quad \forall t$$

$$(2) \quad E[(X_t - \mu)(X_{t-s} - \mu)] = \gamma_s \quad \forall t, s$$

La primera condición, que define estacionariedad en media, implica que la media del proceso sea constante a lo largo del tiempo. La segunda condición, que define estacionariedad en covarianza, supone que la relación entre las variables aleatorias del proceso no depende del momento de tiempo en que se mida, sino sólo del número de periodos de separación entre ambas. En particular, esta condición implica:

$$E[(X_t - \mu)^2] = \gamma_0 \quad \forall t$$

$$E[(X_t - \mu)(X_{t-s} - \mu)] = \gamma_s = E[(X_t - \mu)(X_{t+s} - \mu)]$$

es decir, un proceso estacionario en covarianza tiene varianza constante a lo largo del tiempo y covarianzas simétricas con respecto a cero. Es decir, dado que $\gamma_s = \gamma_{-s}$ para todo s , sólo es preciso conocer las covarianzas correspondientes a subíndices positivos.

Puede verse con facilidad que, en un proceso estacionario en covarianza (en adelante nos referiremos a él simplemente como estacionario) las observaciones a lo largo del tiempo son útiles para inferir el valor de la media común, μ , de la varianza común, γ_0 , y de las covarianzas γ_s .

En procesos estacionarios, por lo tanto, puede usarse la información a lo largo del tiempo para inferir las características de la distribución del proceso. Que dicha inferencia produzca resultados satisfactorios (i.e. estimadores consistentes) exige una condición más: que el proceso sea ergódico. Aunque la noción de ergodicidad es totalmente distinta de la de estacionariedad, esta última implica en muchos casos ergodicidad, por lo que no nos ocuparemos de ella.

Establecidos los conceptos básicos, podemos volver a la pregunta que anteriormente se formuló: ¿Por qué, para representar una serie temporal, se eligen modelos de la forma: $\Psi(B)X_t = \theta(B)a_t$?

La respuesta tiene como base un conocido teorema debido a Wold, que puede formularse así:

Teorema de la descomposición de Wold

Un proceso X_t estacionario en covarianza puede ser representado de forma única como la suma de dos procesos mutuamente incorrelados, V_t , W_t , tales que:

$$X_t = V_t + W_t$$

$$W_t = \sum_{s=0}^{\infty} c_s a_{t-s}$$

$$\text{con } \sum_{s=0}^{\infty} c_s^2 < \infty$$

$$E(a_t) = 0$$

$$E(a_t a_{t-s}) = \begin{cases} \sigma^2 & s = 0 \\ 0 & s \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{y } E(V_t W_t) = 0$$

El proceso V_t es determinista, y el proceso W_t es puramente no determinista.

El teorema no afirma que el mecanismo generador del proceso X_t sea el señalado, sino sólo que, sea cual sea el mecanismo generador, el proceso puede representarse adecuadamente de esta forma. Sugiere, por lo tanto, que muchos procesos

estacionarios pueden representarse como la suma de un proceso determinista sencillo y una combinación lineal de variables aleatorias independientes.

Dado que los procesos deterministas puros son muy poco habituales, por lo menos en economía, vamos a centrarnos en la componente no determinista.

2.2. Modelos ARMA

Consideremos procesos generados por el modelo

$$\psi(B) X_t = \theta(B) a_t$$

donde a_t es un proceso de ruido blanco. Si el polinomio $\psi(B) = 1$ el proceso se escribirá

$$X_t = \theta(B) a_t = (\theta_0 + \theta_1 B + \dots + \theta_q B^q) a_t = \sum_{i=1}^q \theta_i a_{t-i}$$

y se denominará *proceso de medias móviles MA (q)*, ya que es un promedio móvil de sucesivos valores del proceso a_t ponderado por los coeficientes θ .

Si el polinomio $\theta(B) = 1$, el proceso se escribirá

$$\begin{aligned} \psi(B) X_t &= (\psi_0 + \psi_1 B + \dots + \psi_p B^p) X_t = \\ &= \sum_{i=0}^p \psi_i X_{t-i} = a_t \end{aligned}$$

y se denominará *proceso autorregresivo AR (p)* por representar precisamente el modelo de regresión en el que todos los regresores son valores pasados del regresando:

$$X_t = \psi_1 X_{t-1} + \dots + \psi_p X_{t-p} + a_t$$

Si ninguno de los polinomios $\psi(B)$ y $\theta(B)$ es igual a la unidad, el proceso

$$\begin{aligned} \psi(B) X_t &= \theta(B) a_t \\ \sum_{i=0}^p \psi_i X_{t-i} &= \sum_{j=0}^q \theta_j a_{t-j} \end{aligned}$$

se llamará *proceso autorregresivo-medias móviles ARMA (p,q)* y podrá entenderse como una ecuación de regresión en la que los regresores son valores pasados del regresando y la perturbación aleatoria sigue a su vez un proceso de media móvil. Es decir

$$X_t = \psi_1 X_{t-1} + \dots + \psi_p X_{t-p} + u_t$$

con $u_t = \theta_0 a_t + \theta_1 a_{t-1} + \dots + \theta_q a_{t-q}$

En los desarrollos posteriores supondremos siempre $\theta_0 = \psi_0 = 1$.

Bajo determinadas condiciones, los procesos AR y ARMA pueden escribirse en la forma:

$$X_t = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i a_{t-i} \quad (1)$$

Por otro lado, un proceso de media móvil responde ya a esta forma, suponiendo $\pi_i = 0$ para $i > q$.

Dado el resultado del Teorema de Wold, un proceso estacionario no determinista puede representarse por (1), con lo que conviene indagar bajo qué condiciones procesos AR, MA y ARMA son estacionarios y bajo qué condiciones procesos AR y ARMA pueden escribirse en la forma (1).

2.2.1. Condiciones de estacionariedad

Por lo que respecta a procesos MA, el hecho de que una serie estacionaria pueda representarse a través de (1) (que es una media móvil infinita), garantiza estacionariedad. En todo caso, es muy fácil demostrar la estacionariedad de dichos procesos apelando a las características del proceso ruido blanco a_t . En efecto, dado que

$$E(a_t) = 0$$

$$E(a_t a_{t-s}) = \begin{cases} \sigma^2 & s = 0 \\ 0 & s \neq 0 \end{cases}$$

se obtiene inmediatamente que, para:

$$X_t = \theta_0 a_t + \theta_1 a_{t-1} + \dots + \theta_p a_{t-p}$$

$$E(X_t) = 0$$

$$E(X_t X_{t-s}) = \begin{cases} \sigma^2 (\theta_0^2 + \dots + \theta_p^2) & s = 0 \\ \sigma^2 (\theta_0 \theta_s + \theta_1 \theta_{s+1} + \dots + \theta_{p-s} \theta_p) & s \leq p \\ 0 & s > p \end{cases}$$

Puesto que los parámetros $(\theta_0 \dots \theta_p)$ son fijos, ni la media ni las covarianzas del proceso dependen del tiempo t , y la varianza es finita.

Para procesos AR, puede demostrarse que la condición que asegura estacionariedad es que las raíces del polinomio $\phi(B)$ sean, en valor absoluto, mayores que la unidad. Sin tratar de demostrarlo de una manera rigurosa, podemos ilustrar el proceso seguido por la demostración, para el caso más sencillo, el de un proceso AR (1):

$$X_t = \phi X_{t-1} + a_t$$

puede escribirse, usando el operador de retardos B , como:

$$(1 - \phi B) X_t = a_t$$

El polinomio $(1 - \phi B)$ tiene en este caso una única raíz, igual a $1/\phi$. Dado que el proceso estocástico X_t es generado por el modelo AR (1) en todos los momentos de tiempo, X_{t-1} , X_{t-2} , etc., sigue el mismo modelo. Por sustituciones sucesivas;

$$\begin{aligned} X_t &= \phi X_{t-1} + a_t \\ &= \phi (\phi X_{t-2} + \phi a_{t-1}) + a_t \\ &= \phi^2 (\phi X_{t-3} + \phi a_{t-2}) + a_t \\ &\dots\dots\dots \\ &= \phi^n X_{t-n} + \sum_{i=0}^{n-1} \phi^i a_{t-i} \end{aligned}$$

Si el coeficiente ϕ es menor que la unidad en valor absoluto, el término $\phi^n X_{t-n}$ es negligible para n grande. Por lo tanto, podemos escribir:

$$X_t = \sum_{i=0}^{\infty} \phi^i a_{t-i}$$

que es un proceso $MA(\infty)$ igual que (1). Por lo tanto, puede demostrarse que es un proceso estacionario. Dado que $|\phi| < 1$, la varianza del proceso será finita.

La condición para que el proceso $AR(1)$ pueda convertirse en un proceso $MA(\infty)$ es únicamente, que $|\phi| < 1$. Por lo tanto, $1/\phi$ ha de ser mayor que la unidad, y la estacionariedad se garantiza si la raíz del polinomio autorregresivo es mayor que la unidad, tal como se ha indicado antes. La demostración de que la condición de estacionariedad en el caso general es que las raíces del polinomio $\phi(B)$ sean mayores que la unidad sigue los mismos pasos que en el caso $AR(1)$.

Aunque hemos establecido que un proceso $MA(q)$ será siempre estacionario, el desarrollo anterior puede servirnos para establecer otra característica de los procesos MA .

En efecto, supongamos el proceso

$$X_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} = (1 - \theta B) a_t$$

Es evidente que podrá escribirse como

$$\frac{1}{1 - \theta B} X_t = X_t + \theta X_{t-1} + \theta^2 X_{t-2} + \dots = a_t$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \theta^i X_{t-i} = a_t$$

Siempre que la raíz del polinomio $(1 - \theta B)$ es mayor que la unidad; esto es, siempre que $|\theta| < 1$. El desarrollo es exactamente similar al caso anterior y el resultado indica que, si se cumple la condición establecida, un proceso $MA(1)$ puede escribirse como $AR(\infty)$ con coeficientes que decrecen exponencialmente. En el caso general, un proceso $MA(q)$ puede escribirse como $AR(\infty)$ si las raíces del polinomio $\theta(B)$ son mayores que la unidad. En este caso, diremos que el proceso MA es *invertible*. Puede demostrarse que, a partir de la función de autocorrelación de un proceso MA puede obtenerse siempre un proceso invertible. En adelante, por lo tanto, asumiremos que los procesos MA que estudiamos son invertibles.

Para un proceso $ARMA(p, q)$ es evidente que las condiciones de estacionariedad afectan sólo a la parte autorregresiva del mismo. En efecto, si $\phi(B) = 1$ el proceso es $MA(q)$ y, por lo tanto, estacionario. No sorprende, por lo tanto, encontrar que un proceso $ARMA(p, q)$ será estacionario si su parte autorregresiva lo es; es decir, si las raíces de $\phi(B)$ son mayores que la unidad.

Un resultado de la demostración es particularmente interesante: Un proceso $AR(p)$ puede escribirse como un proceso $MA(\infty)$ si cumple las condiciones de estacionariedad. De la misma forma, un proceso $ARMA \phi(B)X_t = \theta(B)a_t$ puede escribirse:

$$X_t = \frac{\theta(B)}{\phi(B)} a_t = \sum_{i=0}^{\infty} c_i a_{t-i}$$

si su parte autorregresiva es estacionaria. De la misma forma, un proceso $ARMA$ será invertible si su parte MA lo es.

Nos interesan los modelos $ARMA$ porque incorporan pocos parámetros, $p + q$. Por otra parte, hemos visto (teorema de Wold) que cualquier proceso estacionario estrictamente no determinista puede representarse como:

$$Y_t = \left[\sum_{j=0}^{\infty} c_j B^j \right] a_t \quad (2)$$

Como habitualmente un polinomio en B como el de (2) puede aproximarse bien mediante

$$\frac{\theta(B)}{\Phi(B)}$$

tenemos que, de ordinario, cualquier proceso estrictamente no determinista se aproxima a un ARMA (p, q) . Si toleramos la presencia de raíces unitarias de $\Phi(B)$, la clase ARMA (p, q) se amplía aún más para incluir muchos procesos con parte determinista.

Aceptada la utilidad de estos modelos, conviene ahora describir sus características. Recordando que el objetivo del análisis de series temporales es estudiar la estructura de la relación entre las variables de un proceso estocástico, el siguiente objetivo es determinar la forma de esta relación para distintos modelos. Para ello, definiremos las funciones de autocovarianza y autocorrelación y la forma que adoptan para modelos ARMA estacionarios.

2.2.2. Función de autocorrelación

Venimos denotando por γ_s a la autocovarianza de un proceso estacionario para variables separadas entre sí s periodos:

$$\gamma_s = E[(X_t - \mu)(X_{t-s} - \mu)]$$

Dado que la varianza de un proceso estacionario es constante para todo t , la autocorrelación entre variables separadas s periodos es, simplemente:

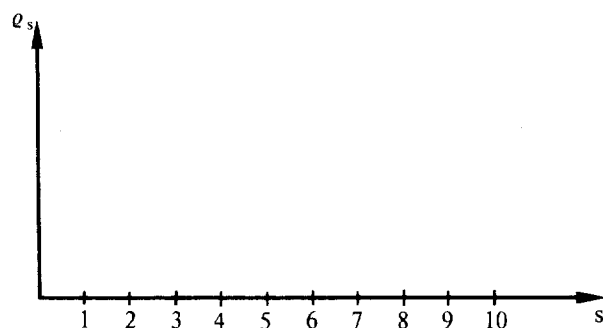
$$\rho_s = \frac{\gamma_s}{\gamma_0}$$

con $\gamma_0 = E[(X_t - \mu)^2] = E[(X_{t-s} - \mu)^2]$

La sucesión de autocorrelaciones, que llamaremos función de autocorrelación,

$$\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_s, \dots$$

recoge la estructura de interrelación entre las variables de un proceso estocástico. Llamaremos correlograma al gráfico en el que se representan las sucesivas autocorrelaciones:



Supongamos un proceso X_t con media cero. Para calcular la función de autocorrelación del proceso únicamente necesitaremos evaluar:

$$\gamma_0 = E(X_t^2)$$

$$\gamma_1 = E(X_t X_{t-1})$$

$$\gamma_2 = E(X_t X_{t-2})$$

$$\dots$$

$$\gamma_s = E(X_t X_{t-s})$$

Veamos los valores que los distintos modelos establecen:

— Modelos de medias móviles

Para un modelo MA (q)

$$X_t = a_t + \theta_1 a_{t-1} + \dots + \theta_q a_{t-q}$$

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= E(X_t^2) = E[a_t + \theta_1 a_{t-1} + \dots + \theta_q a_{t-q}]^2 = \\ &= \sigma^2 (1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2) \end{aligned}$$

dada la incorrelación del proceso a_t .

$$\gamma_1 = E(X_t X_{t-1}) = E(a_t + \theta_1 a_{t-1} + \dots + \theta_q a_{t-q})$$

$$(a_{t-1} + \theta_1 a_{t-2} + \dots + \theta_q a_{t-q-1}) = \sigma^2 (\theta_0 \theta_1 + \theta_1 \theta_2 + \dots + \theta_{s-1} \theta_s)$$

Es fácil ver que:

$$\gamma_s = E(X_t X_{t-s}) =$$

$$= \sigma^2 (\theta_0 \theta_s + \theta_1 \theta_{s+1} + \dots + \theta_{p-s} \theta_p) \quad \text{para } s \leq p$$

$$\gamma_s = 0 \quad \text{para } s > p$$

La función de autocorrelación del proceso MA puede obtenerse inmediatamente, a partir de la información anterior. El elemento distintivo en este caso es el hecho de que todas las autocorrelaciones de orden superior a p son cero para un proceso MA (p) .

Su correlograma, por lo tanto, tendrá la siguiente forma:

$$\varrho_s = A_1 m_1^s + A_2 m_2^s + \dots + A_p m_p^s$$

donde las A_i son constantes que dependen de valores iniciales y las m_i son las raíces del polinomio:

$$X^p - \psi_1 X^{p-1} - \dots - \psi_{p-1} X - \psi_p = 0$$

suponiendo que todas las raíces son reales.

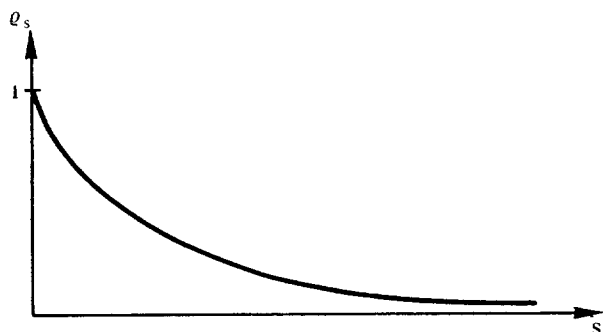
Las raíces de este polinomio son inversas de las raíces del polinomio:

$$1 - \psi_1 B - \dots - \psi_p B^p = 0$$

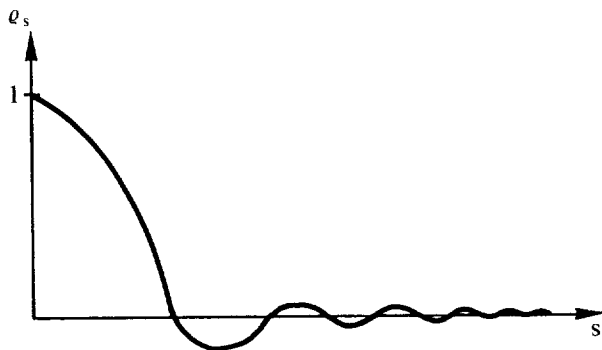
Si el proceso es estacionario, las raíces de este último polinomio son mayores que la unidad, por lo que las m_i han de ser menores que la unidad.

La función de autocorrelación es por lo tanto igual a una suma de exponenciales que decrecen al aumentar s .

La forma típica del correlograma de un proceso autorregresivo será por lo tanto la siguiente:



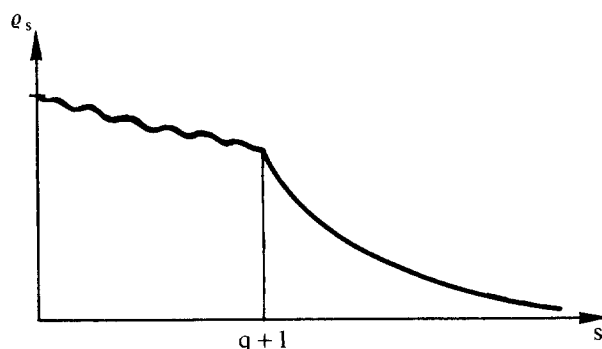
Hay que señalar que si algún par de raíces del polinomio son complejas, generarán sinusoides tendiendo a cero, dado que el módulo de las raíces será menor que la unidad. En este caso, el correlograma tendría la siguiente forma:



— Procesos ARMA

Dadas las características de la función de autocorrelación en procesos AR y MA, es fácil encontrar las correspondientes a un proceso ARMA. Dado que éste es la suma de un proceso AR y un MA, su función de autocorrelación vendrá dada por la superposición de ambos componentes.

Por lo tanto, el correlograma típico tendrá la siguiente estructura:



La única diferencia con los anteriores es que:

— Habrá q valores que recojan a la vez el efecto AR y MA.

— A partir de $q + 1$, el proceso MA no contribuye nada a la correlación y observaremos una exponencial decreciente.

El hecho de que las características de la función de autocorrelación sean tan distintas en las diferentes clases de procesos, hace de aquella un instrumento muy útil para determinar los modelos que más adecuadamente pueden representar una serie.

Sin embargo, es sólo un instrumento; para contar con otro alternativo vamos a definir la función de autocorrelación parcial.

2.2.3. Función de autocorrelación parcial (f.a.p.)

Sea cual sea el mecanismo generador del proceso X_t , consideremos la siguiente sucesión de modelos:

$$X_t = \phi_{11} X_{t-1} + a_t$$

$$X_t = \phi_{21} X_{t-1} + \phi_{22} X_{t-2} + a_t$$

$$X_t = \phi_{31} X_{t-1} + \phi_{32} X_{t-2} + \phi_{33} X_{t-3} + a_t$$

$$\dots$$

$$X_t = \phi_{s1} X_{t-1} + \phi_{s2} X_{t-2} + \dots + \phi_{ss} X_{t-s} + a_t$$

La sucesión

$$\phi_{11}, \phi_{22}, \phi_{33}, \dots, \phi_{ss}, \dots$$

se llamará función de autocorrelación parcial y está constituida por la serie de últimos coeficientes correspondientes a procesos AR de órdenes sucesivamente más elevados.

El gráfico que representa ϕ_{ss} para $s = 1, 2, \dots$ será el correlograma parcial.

Las características de la función de autocorrelación parcial para los distintos tipos de modelos estudiados pueden obtenerse con facilidad.

Un proceso AR (p)

$$X_t = \psi_1 X_{t-1} + \psi_2 X_{t-2} + \dots + \psi_p X_{t-p} + a_t$$

presentará claramente una sucesión $\phi_{11}, \phi_{22}, \dots, \phi_{pp}$ de valores distintos de cero, ya que el modelo postula correlación directa entre X_t y $X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_{t-p}$. Sin embargo, $\phi_{p+1,p+1}, \phi_{p+2,p+2}, \dots$ serán todos iguales a cero, ya que no existe correlación directa entre X_t y $X_{t-p+1}, X_{t-p+2}, \dots$

Un proceso MA (q) invertible puede escribirse:

$$\theta(B)^{-1} X_t = a_t$$

$$X_t - c_1 X_{t-1} - c_2 X_{t-2} - \dots = a_t$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_i X_{t-i} = a_t$$

donde las ponderaciones c_i son funciones de las raíces m_i del polinomio $(X^q - \theta_1 X^{q-1} - \dots - \theta_q) = 0$. Si el proceso es invertible, dichas raíces son menores que la unidad y las ponderaciones c_i tenderán exponencialmente a cero. Por lo tanto, la sucesión $\phi_{11}, \phi_{22}, \phi_{33}, \dots$ será una sucesión infinita, exponencialmente decreciente (con ciclos si algún par de raíces del polinomio son complejas).

Para un proceso ARMA invertible, sólo hace falta notar que:

$$\phi(B) X_t = \theta(B) a_t$$

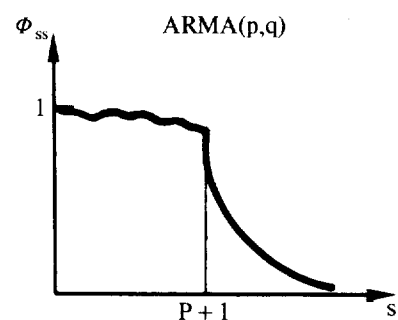
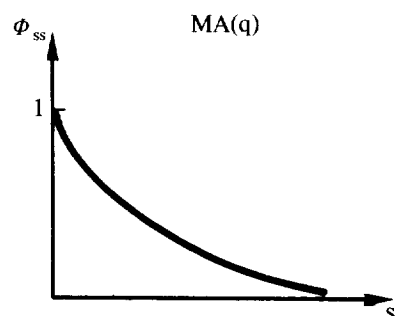
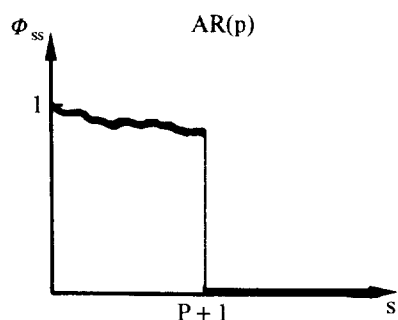
puede escribirse:

$$\theta(B)^{-1} \phi(B) X_t = a_t$$

Es decir, el proceso AR (∞) producido por la inversión de $\theta(B)$ se acumula al proceso $\theta(B) X_t$, produciendo un AR (∞) que contiene dos componentes.

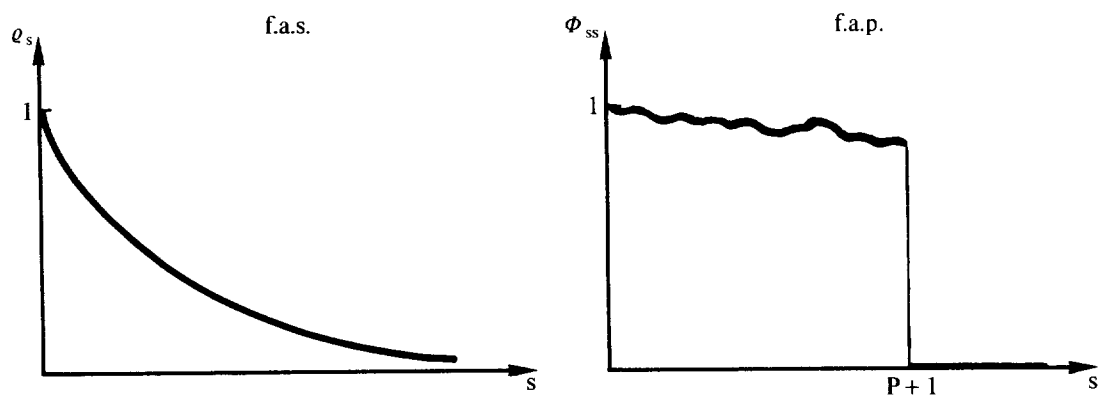
En la función de autocorrelación parcial, los dos efectos se acumularán hasta superar el orden del proceso autorregresivo, p, y a partir de $p + 1$ sólo se mantendrá el efecto del proceso MA.

Por lo tanto, los correlogramas parciales para los tres tipos de procesos tendrán la siguiente estructura:

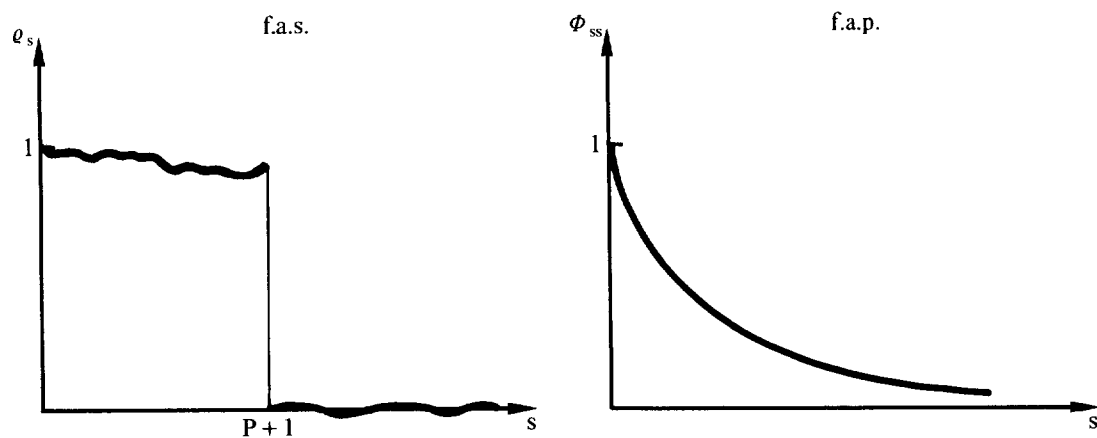


Llegados a este punto, podemos ver que, si conociéramos la función de autocorrelación y la función de autocorrelación parcial de un proceso podríamos conocer la forma del modelo que lo ha generado, así como el número de parámetros que dicho modelo contiene.

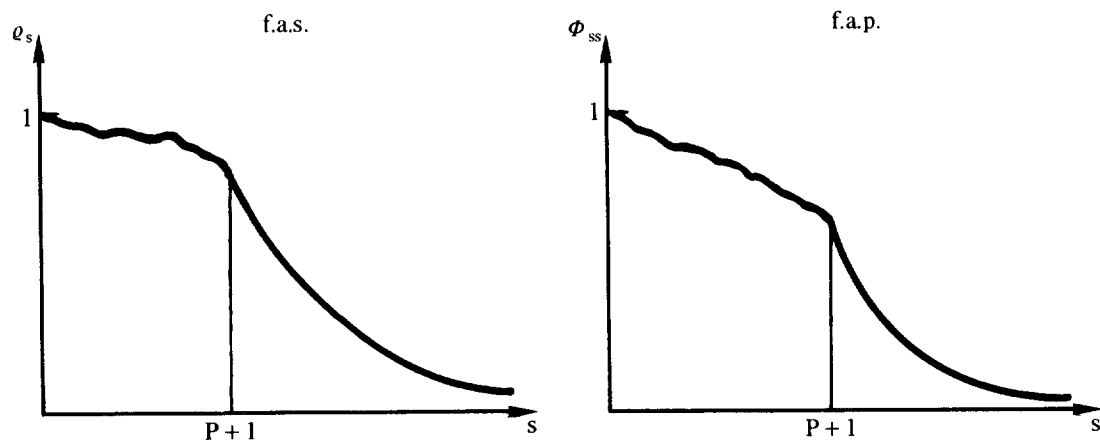
En efecto, los correlogramas



definen un proceso AR (p) estacionario; los siguientes:



definen un proceso MA (q) invertible; y por último:



definen un proceso ARMA (p, q) estacionario e invertible.

2.3. Construcción de modelos ARMA a partir de los datos

En los apartados anteriores se han puesto las bases para tratar de responder a la siguiente pregunta: Si disponemos de una serie de observaciones de una variable en el tiempo y queremos conocer a partir de esta información el mecanismo de evolución de la variable, ¿qué podemos hacer?

Las respuestas obtenidas hasta ahora son las siguientes:

1. Si creemos que la serie representa observaciones de variables aleatorias, y si la sucesión de variables tiene un comportamiento estacionario, hay buenas razones para proponer modelos del tipo $\Phi(B)X_t = \theta(B)a_t$.

2. Un modelo de esta clase hace pasar al proceso ruido blanco a_t a través de un filtro y genera el proceso X_t . A la inversa, pasando el proceso X_t por un filtro, encontramos un proceso independiente. Esto significa que toda la estructura de interrelación del proceso X_t queda contenida en el filtro. Por lo tanto, modelos de esta clase nos permiten conocer la forma de evolución de las variables X_t .

3. Si tratamos de averiguar qué modelo de la clase $\Phi(B)X_t = \theta(B)a_t$ ha generado nuestra serie, son instrumentos muy útiles la función de autocorrelación y función de autocorrelación parcial del proceso.

A partir de este punto podemos preguntarnos: Dada una serie temporal ¿cómo construyo un modelo de la clase ARMA que recoja suficientemente bien sus características?

Box y Jenkins (6) sugirieron un método de construcción de modelos que ha obtenido una enorme aceptación. El método consta de tres etapas que se aplican iterativamente:

- Identificación.
- Estimación.
- Contraste.

La etapa de identificación determina la clase de modelo adecuada a la serie, y el número de parámetros del mismo. La etapa de estimación obtiene los valores de los parámetros desconocidos. La etapa de contraste determina si el modelo se ajusta o no a la serie. Si el modelo no resulta satisfactorio, se vuelve a empezar por la etapa de identificación hasta llegar a lograr un modelo adecuado.

Conviene detenerse a considerar qué es un modelo adecuado: Tal como se ha señalado en la introducción, los modelos de series temporales se

construyen únicamente a partir de los datos. No se usa ninguna hipótesis previa sobre su comportamiento: la única decisión tomada es la de tratar de ajustar un modelo de la clase ARMA.

Por otro lado el objeto de la construcción de dicho modelo es extraer de la serie la máxima información sobre su estructura temporal. Si un modelo consigue que el resultado de su filtro sea una serie ruido blanco, el objetivo se habrá cumplido. En efecto, un proceso ruido blanco no contiene ninguna información sobre relaciones temporales. Por esta razón, se dice que es impredecible y se le denomina, en ocasiones, innovación. Toda la información del pasado útil para predecir el futuro se extrae por un modelo que proporciona una serie ruido blanco.

Por esta razón se considerará un modelo adecuado aquél cuyos residuos se aproximen razonablemente al comportamiento de un ruido blanco. Suele usarse además otro criterio básico: entre dos modelos que proporcionen residuos similares se elegirá aquél cuya estructura sea más simple.

2.3.1. Identificación de modelos

Se ha señalado ya que las características conocidas de las f.a.s. y f.a.p. de un proceso ARMA permitiría identificar el tipo de modelo que ha generado la serie en caso de que conociéramos dichas funciones. Este no es, sin embargo, el caso.

No obstante podemos estimar las f.a.s. y f.a.p. a partir de los datos de la serie. El estimador utilizado para la correlación q_s de orden s es el siguiente:

$$r_s = \frac{\sum_{t=s+1}^T X_t X_{t-s}}{\sum_{t=0}^T X_t^2} \quad s = 0, 1, 2$$

Se puede demostrar que el estadístico propuesto es un estimador consistente de q_s . Dada la fórmula que se emplea, está claro que cuanto mayor sea s , el número de valores de X usados en la estimación es menor. El número de correlaciones q_s que pueden tener una fiabilidad razonable depende por lo tanto del tamaño muestral T . Box y Jenkins sugieren calcular autocorrelaciones estimadas hasta un retardo máximo $s = T/4$.

La función de autocorrelación parcial puede estimarse ajustando sucesivos modelos AR a la serie.

En ambos casos, los estadísticos obtenidos son aproximaciones a los valores teóricos de la f.a.s. y

la f.a.p. y pueden usarse como instrumentos de identificación del modelo. Hay que señalar, no obstante, que no podemos esperar que sigan fielmente a los valores teóricos que tratan de estimar, por lo que pueden obtenerse en muchos casos valores de r_s y $\hat{\phi}_{ss}$ grandes sin que sus equivalentes teóricos lo sean. De la misma manera, encontraremos valores distintos de cero cuando los valores teóricos sean cero.

Para ayudarnos a decidir qué valores hay que considerar y cuáles no, necesitamos conocer la distribución del estimador r_k y $\hat{\phi}_{kk}$. Aunque la distribución exacta no se conoce, para tamaños muestrales elevados, bajo la hipótesis de que las correlaciones teóricas ρ_s y ϕ_{ss} son iguales a cero, la distribución de ambos estadísticos es aproximadamente normal. Las varianzas respectivas pueden aproximarse a través de las siguientes expresiones:

$$\text{var}(r_s) \cong \frac{1}{T} (1 + 2 \sum_{i=1}^q r_i^2) \quad \text{para } s > q$$

$$\text{var}(\hat{\phi}_{ss}) \cong \frac{1}{T}$$

siendo q el orden de dependencia del proceso.

Por lo tanto, el contraste aproximado que se puede establecer es:

$$\begin{cases} H_0 : \rho_s = 0 \\ H_1 : \rho_s \neq 0 \end{cases} \quad \left| \frac{r_s}{\sqrt{\text{var}(r_s)}} \right| > 1,96 \rightarrow \text{rechazar } H_0 \text{ y admitir que la correlación de orden } s \text{ es distinta de cero.}$$

$$\begin{cases} H_0 : \phi_{ss} = 0 \\ H_1 : \phi_{ss} \neq 0 \end{cases} \quad \left| \frac{\hat{\phi}_{ss}}{1/\sqrt{T}} \right| > 1,96 \rightarrow \text{rechazar } H_0$$

El proceso de identificación comenzaría, por lo tanto, con el cálculo del correlograma simple y parcial de la serie, estimados de la manera señalada, y la decisión sobre qué valores de ambos correlogramas han de ser considerados distintos de cero.

¿Qué pasa si, después de hacer los cálculos indicados, encontramos que todos los valores calculados de r_s son significativamente distintos de cero? Un correlograma que no tiende a cero es muy frecuente en series económicas, y no nos sirve en el proceso de identificación.

La razón de este resultado es la no estacionariedad de la serie. Debemos recordar que hemos

obtenido las características de las autocorrelaciones para procesos ARMA estacionarios, pero nada sabemos cuando se trata de procesos no estacionarios.

La hipótesis que en este caso se utiliza es suponer que alguna transformación de la serie es estacionaria.

Transformaciones

Si volvemos atrás, recordaremos que las condiciones de estacionariedad suponen la existencia de media y varianza constante, y covarianzas que no dependen del tiempo.

Si nuestra serie crece (o disminuye) a medida que avanzamos en el tiempo, es difícil admitir que todas las variables X_t del proceso estén centradas alrededor de un valor común, μ . La existencia de tendencias en los datos es la fuente más común de no estacionariedad en media y, como consecuencia, de correlogramas que no tienden a cero.

Imaginemos que la serie está compuesta por una tendencia lineal y un elemento aleatorio:

$$X_t = a + bt + u_t = T_t + u_t$$

Estaríamos en el contexto de modelos de componentes no observables, con una tendencia determinista. Si estimamos el modelo anterior con los datos de la serie, los residuos de la estimación

$$\hat{u}_t = X_t - \hat{T}_t = X_t - \hat{a}_t - \hat{b}t$$

serán una serie sin tendencia: y, por lo tanto, aproximadamente estacionaria, en media, si u_t es estacionario.

Podemos también tomar una diferencia de la serie X_t :

$$X_t - X_{t-1} = (1 - B) X_t = a + (u_t - u_{t-1})$$

Tomar una diferencia también elimina la tendencia lineal.

Tendencias más complejas pueden ser tratadas con polinomios en t de grado más elevado en el primer caso, y tomando diferencias sucesivas en el segundo.

¿Qué pasará si observaciones posteriores de la variable X nos indican que los valores de la serie se estabilizan? En el primer procedimiento, sería preciso establecer una forma distinta para la tendencia y reestimar el modelo. En el segundo, sin embargo, seguiríamos eliminando la tendencia. La razón está en que en el primer caso se introduce

una tendencia invariable para toda la serie, y en el segundo no.

Suponer que alguna diferencia de la serie observada sigue un comportamiento estacionario supone proponer modelos del tipo:

$$\phi(B)(1-B)^d X_t = \theta(B) a_t$$

que son modelos del tipo ARMA

$$\delta(B) X_t = \theta(B) a_t$$

en los que el polinomio autorregresivo se descompone en dos partes:

$$\delta(B) = \phi(B)(1-B^d)$$

una de ellas estacionaria y la otra no. Modelos de esta clase son llamados modelos *ARIMA*. La “i” añadida significa “integrados” y hace referencia a que, al transformar una serie a través del factor de diferencias $(1-B)$, la serie original puede obtenerse a partir de la transformada por suma:

$$X_t^* = (1-B) X_t$$

$$X_t = \frac{1}{1-B} X_t^* = X_t^* + X_{t-1}^* + X_{t-2}^* + \dots$$

A efectos de construcción de un modelo para una serie dada, por lo tanto, comportamientos no estacionarios en el correlograma nos llevarán a calcular $(1-B) X_t$, $(1-B)^2 X_t$, ... hasta lograr un correlograma que pueda considerarse estacionario.

Puede también existir no estacionariedad en varianza. Es fácil encontrar series cuyo rango de variación aumenta al avanzar los períodos de tiempo, lo que no es compatible con la hipótesis de varianza constante.

Para corregir este problema, suele ser necesario utilizar transformaciones no lineales. La más conocida de entre éstas es la propuesta por Box y Cox, que transforma la serie X_t de la siguiente manera:

$$X_t^{(\lambda)} = \begin{cases} \frac{X_t^\lambda - 1}{\lambda} & \lambda \neq 0 \\ \log X_t & \lambda = 0 \end{cases}$$

Si la serie observada es no estacionaria, puede aplicarse esta transformación eligiendo el valor de λ que estabilice la varianza. El proceso de elección de λ puede ser muy pesado, por lo que es práctica habitual elegir $\lambda = 0$ o, lo que es lo mismo, tomar logaritmos de la serie.

Una vez transformada la serie de modo que su comportamiento sea estacionario, los correlogramas simple y parcial de la serie transformada nos permitirán elegir un modelo para la misma. En la práctica, es poco probable que un modelo único sea el resultado del proceso de identificación, por lo que es habitual pasar a la etapa de estimación con dos o tres modelos alternativos.

2.3.2. Estimación de modelos

Supongamos que hemos identificado un modelo AR (2) para nuestra serie:

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \phi_2 X_{t-2} = a_t$$

El siguiente paso es elegir los valores de los coeficientes que mejor se adapten a nuestros datos.

Exponer en detalle el procedimiento de estimación está por encima de los objetivos de estas notas. Señalemos, únicamente, algunas de las ideas básicas, ilustrándolas para los modelos más sencillos.

Para un modelo AR (1)

$$X_t - \phi X_{t-1} = a_t$$

minimizar la suma de cuadrados de los errores $\sum a_t^2$ es posible si eliminamos la primera observación:

$$S(\phi) = \sum_{t=2}^T a_t^2 = \sum_{t=2}^T (X_t - \phi X_{t-1})^2$$

La razón es que sólo podemos definir errores de 2 hasta T, ya que $a_1 = X_1 - \phi X_0$ depende de un valor que no conocemos. De la misma manera, para un proceso AR (p) perderemos las p primeras observaciones, obteniendo nuestras estimaciones de

$$\min_{\phi} \sum_{t=p+1}^T a_t^2 = S(\phi_1 \dots \phi_p)$$

La estimación por este procedimiento se llamará *condicionada* por depender de los valores de $X_1 \dots X_p$ que se toman como datos.

En un proceso MA (1) es posible generar la suma $S(\theta)$ de la siguiente manera:

$$X_t = a_t + \theta a_{t-1}$$

$$a_t = X_t - \theta a_{t-1}$$

$$a_{t-1} = X_{t-1} - \theta a_{t-2}$$

$$a_{t-2} = X_{t-2} - \theta a_{t-3}$$

Sustituciones sucesivas de a_{t-1} , a_{t-2} , etc., proporcionarán

$$a_t = f(X_t, X_{t-1}, \dots, X_t, a_0)$$

donde f es una función no lineal en los parámetros. De nuevo

$$S(\theta) = \sum_1^T a_t^2$$

dependerá del valor inicial que fijemos para a_0 . La no linealidad de $S(\theta)$ en el parámetro θ exigirá un proceso iterativo para obtener la estimación.

El mismo tipo de resultado se extiende para un proceso ARMA (1.1) con:

$$X_t = X_t - \phi X_t + a_t - \phi a_{t-1}$$

y precisando valores iniciales de X_1 y a_1 .

Las estimaciones obtenidas minimizando $S(\phi, \theta)$, construido de la manera indicada, serán por tanto estimaciones condicionadas. Las condiciones son:

- Modelos AR.—Valores iniciales $X_1 \dots X_p$
- Modelos MA.—Valores iniciales $a_0 \dots a_{-q}$
- Modelos ARMA.—Valores iniciales $X_1 \dots X_p$
 $a_0 \dots a_{-q}$

Los valores iniciales ($a_0 \dots a_{-q}$) son inobservables. Es habitual hacerlos iguales a su esperanza matemática, que es cero. Esto puede introducir una alteración importante en el valor de $S(\phi, \theta)$ si los valores de a_t realmente difirieran mucho de cero. Por esta razón, en ocasiones se utiliza el propio modelo identificado para generar, hacia atrás, valores plausibles de $a_0 \dots a_{-q}$. Esta técnica se conoce con el nombre de *back-forecasting*. Los valores iniciales de los parámetros del proceso precisos para predecir hacia atrás valores de a_t (y para comenzar el proceso iterativo de estimación no lineal) se obtienen de las autocorrelaciones del proceso, a partir de la expresión $R(z) = k\theta(z)\theta(z^{-1})$.

2.3.3. Contrastes

La etapa de contrastes consiste en cerciorarse de que los residuos del modelo siguen un comportamiento compatible con la hipótesis de ruido blanco, aunque también nos ocuparemos de comprobar que los coeficientes estimados del modelo son

significativamente distintos de cero, de acuerdo con los contrastes habituales.

El análisis de residuos se realiza normalmente a partir de la función de autocorrelación de los mismos. Recordemos que un ruido blanco tiene todas sus correlaciones iguales a cero. Por lo tanto, debemos esperar que el correlograma de los residuos (calculado de la misma forma que el de la serie original) tenga todos sus valores no significativamente distintos de cero. Bajo la hipótesis nula de que todas las autocorrelaciones son cero, la varianza puede aproximarse por $1/T$. Hay que señalar que esta varianza puede ser mucho mayor que la verdadera para retardos pequeños. Por lo tanto, debe usarse como un límite superior (ver p. ej. Box y Jenkins (2)).

Como se ha señalado, las autocorrelaciones estimadas pueden diferir bastante de las teóricas. Por lo tanto, no nos preocupará tanto que haya alguna autocorrelación significativamente distinta de cero en los residuos, como que haya algún indicio de estructura en los mismos. Si los residuos presentan cierta estructura de autocorrelación, esto supone que no toda la relación entre las variables originales ha sido recogida por el modelo, por lo que éste puede mejorarse. Si éste es el caso, la evidencia mostrada por los residuos se usa para identificar un nuevo modelo, y repetir el proceso de estimación y contraste.

Un contraste global, que se utiliza para comprobar que las autocorrelaciones en su conjunto no son significativas, se basa en el siguiente estadístico:

$$Q = T \sum_{k=1}^m r_k^2(\hat{a})$$

llamado estadístico Box-Pierce y que, bajo la hipótesis nula de no autocorrelación, se distribuye asintóticamente como una χ^2 con $m-p-q$ grados de libertad.

Además de comprobar que los residuos presentan un comportamiento adecuado, será preciso fijarse en la capacidad explicativa del modelo y en la significación de los coeficientes estimados.

En cuanto a la capacidad explicativa (medida como varianza explicada en relación con varianza total de la transformación estacionaria que se utiliza), conviene señalar que, dado que distintos modelos pueden estar basados en distinto número de observaciones, no permite comparar directamente el ajuste obtenido con modelos diferentes. Por otro lado, el ajuste obtenido con modelos de esta clase

no suele ser muy alto, consecuencia de la relativa simplicidad de los mismos.

Por lo que respecta a la significación de los coeficientes, los contrastes deben realizarse a través de una distribución normal, que es la forma de la distribución asintótica de los parámetros estimados.

Un procedimiento bastante utilizado para comprobar el adecuado ajuste proporcionado por un modelo, consiste en sobreparametrizarlos; es decir, añadir parámetros extras y comprobar que no son significativos.

Por último, conviene señalar que, dado el proceso de construcción del modelo, es importante contrastar la existencia o no de raíces unidad en los polinomios estimados, con objeto de encontrar la transformación de la serie que cumple las condiciones de estacionariedad.

En efecto, supongamos que la serie X_t es estacionaria y que su estructura es la siguiente:

$$X_t = (1 - \theta B) a_t \quad \text{con } |\theta| < 1$$

Si esta serie se diferencia una vez, el modelo correspondiente a $\Delta X_t = (1 - B) X_t =$

$$= (1 - B) (1 - \theta B) a_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2) a_t$$

El polinomio MA (2) será no invertible, al ser una de sus raíces igual a la unidad. Si estimáramos este modelo, podemos esperar que el polinomio estimado $(1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2)$ contenga una raíz cercana a la unidad. Este resultado indica en este caso que se ha sobrediferenciado la serie por encima de su transformación estacionaria.

Por otra parte, si la serie X_t no es estacionaria, mientras que ΔX_t sí lo es, correspondiéndole el modelo:

$$(1 - \phi B) \Delta X_t = a_t$$

El modelo para la serie X_t será:

$$(1 - \phi B) (1 - B) X_t = (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2) X_t = a_t$$

donde el polinomio AR (2) no será estacionario por contener una raíz igual a la unidad.

Si en el polinomio AR (2) estimado una de las raíces es cercana a la unidad (como esperamos), indicará que la transformación modelizada no es estacionaria.

Este argumento, que puede generalizarse para polinomios de cualquier grado y también para retar-

dos estacionales señala la importancia de contrastar que las raíces de los polinomios estimados en un modelo no están cerca de la unidad.

Otra cuestión de interés es la referente a la correlación que puede existir entre los parámetros estimados. En efecto, supongamos que una serie está generada por el modelo

$$X_t = (1 - \theta B) a_t$$

y que se trata de ajustar a la misma el siguiente modelo:

$$(1 - cB) X_t = (1 - dB) a_t$$

Si $|c| < 0$ el modelo puede escribirse:

$$X_t = \frac{1 - dB}{1 - cB} a_t =$$

$$= (1 - dB) (1 + cB + c^2 B^2 + \dots) a_t$$

$$= (1 - (d - c) B + (c^2 - dc) B^2 + \dots) a_t$$

$$= (1 - (d - c) B a_t + R)$$

Si la serie contiene información sobre un único parámetro, θ , tratar de estimar dos parámetros, d y c , proporcionará estimaciones poco precisas de ambos parámetros y correlacionadas entre sí, dado que $d - c = \theta$ y hay muchos valores de d y de c compatibles con un mismo θ . Por lo tanto, estimaciones de parámetros muy correlacionadas entre sí suponen, en general, evidencia de sobreparametrización; los datos no contienen información sobre los efectos representados por cada uno de los parámetros del modelo, y es posible recoger su evolución con un modelo más sencillo.

2.3.4. Predicción

La predicción con modelos ARIMA es extremadamente sencilla, y se basa en el siguiente resultado:

Dado un modelo lineal:

$$X_t = a_t + \pi_1 a_{t-1} + \pi_2 a_{t-2} + \pi_3 a_{t-3} + \dots$$

la predicción óptima (en el sentido de minimizar el error cuadrático medio de predicción) que se puede hacer para el valor de la variable X en el período $t + 1$, estando en el período t , coincide con la esperanza matemática de X_{t+1} condicionada a la información existente en el período t . Esto es:

$\hat{X}_t(1)$ - predicción del valor de X_{t+1} hecho en el período t .

$E_t(X_{t+1})$ — valor esperado de X_{t+1} condicionado a la información en t .

$$\hat{X}_t(1) = E_t(X_{t+1})$$

Supongamos estimado el modelo ARIMA (1, 1, 1).

$$(1 - 0,53 B)(1 - B)X_t = (1 + 0,37 B)a_t$$

que podemos escribir:

$$X_t = (1 + 0,53)X_{t-1} - 0,53X_{t-2} + a_t + 0,37a_{t-1}$$

y supongamos que queremos predecir un período hacia adelante:

$$X_{t+1} = 1,53X_t - 0,53X_{t-1} + a_{t+1} + 0,37a_t$$

El único elemento de esta expresión desconocido en t es a_{t+1} . Para predecir óptimamente, deberemos igualarlo a su esperanza matemática en t : $E_t(a_{t+1}) = 0$. La predicción será, por lo tanto:

$$\hat{X}_t(1) = 1,53X_t - 0,53X_{t-1} + 0,37\hat{a}_t$$

con $\hat{a}_t = X_t - \hat{X}_t$, siendo $\hat{X}_t$ el valor que el modelo proporciona para X_t .

Moviéndonos un período más hacia adelante:

$$X_{t+2} = 1,53X_{t+1} - 0,53X_t + a_{t+2} + 0,37a_{t+1}$$

Los elementos desconocidos aquí son X_{t+1} , a_{t+2} , a_{t+1} . Deberemos igualarlos a su esperanza matemática en t :

$$E(a_{t+2}) = 0$$

$$E(a_{t+1}) = 0$$

$$E_t(X_{t+1}) = \hat{X}_t(1)$$

Por lo tanto, la predicción será:

$$\hat{X}_t(2) = 1,053\hat{X}_t(1) - 0,53X_t$$

De esta manera, podemos ir generando sucesivamente predicciones de X_{t+3} , X_{t+4} , ... etc., siempre a partir de la información en t . Las propiedades de la predicción así realizada, así como la distribución de los errores de predicción pueden encontrarse p. ej. en (2).

3. SERIES CON ESTRUCTURA ESTACIONAL

Los modelos ARIMA pretenden extraer de una serie la estructura de interrelación temporal entre las variables. Esta es la razón de que aparezca en ellos el operador de retardos B . El polinomio $\phi(B)$ recoge la relación existente entre $X_t, X_{t-1}, X_{t-2}, \dots$ etc. De la misma forma, el polinomio $\theta(B)$ construye, a partir de un ruido blanco, una estructura de interrelación que, tal como Slutsky descubrió, puede generar comportamientos cíclicos.

Si consideramos la existencia de un ciclo estacional en la serie, podemos preguntarnos si la clase de modelos ARIMA puede ser de utilidad para recogerlo. En esta línea, es evidente que si el operador B es útil para recoger relación entre $X_t, X_{t-1}, X_{t-2}, \dots$ etc., el operador B^s (donde s representa el número de períodos observados en un año) puede ser útil para recoger la estructura estacional.

Imaginemos una serie que corresponde a ventas mensuales de grandes almacenes. Puede observarse que el volumen de ventas crece fuertemente todos los años en el mes de diciembre, debido a la Navidad. A lo largo del año, las ventas describen un ciclo que, sin ser exacto, presenta regularidades todos los años. En estas condiciones, podemos esperar que los meses de diciembre de todos los años estén relacionados entre sí y, por la misma razón, los meses de febrero, marzo, etc. En general, observaciones separadas 12 períodos entre sí estarán relacionadas si existe estacionalidad. Por lo tanto, tratar de relacionar observaciones separadas 12 períodos entre sí puede ser una manera razonable de representar la estructura de estacionalidad para esta serie.

En general, si existe estacionalidad, observaciones separadas entre sí s períodos ($s = 12$ para

datos mensuales, $s = 4$ para datos trimestrales, etc.) estarán correlacionadas. Nos interesa, pues, tratar de buscar la estructura de interrelación para observaciones de la variable $X_t, B^s X_t, B^{2s} X_t, \dots$ etc. Si los modelos ARIMA permiten obtener una representación adecuada de la relación entre $X_t, B X_t, B^2 X_t, \dots$ etc., ¿por qué no probar la misma clase de modelos para describir el comportamiento estacional?

Un modelo como

$$\phi_s(B^s) X_t = \phi_s(B^s) u_t$$

debería ser útil. En muchos casos, se observa que el ciclo estacional evoluciona a lo largo del tiempo, cambiando de nivel. En este caso, tomar diferencias de orden s nos permitiría estabilizar el proceso alrededor de una media común.

$$\phi_s(B^s) (1 - B^s)^D X_t = \theta_s(B^s) u_t$$

será denominado ARIMA (P, D, Q)_s, donde P denota el orden del polinomio autorregresivo, D el número de diferencias estacionales tomadas, y Q el orden del polinomio del media móvil, siendo s el número de períodos muestrales en un año.

Supongamos que el modelo señalado es capaz de representar adecuadamente la estructura estacional. ¿Cuál podemos esperar que sea el comportamiento de la serie u_t ? Si la serie original no contiene más estructura de autocorrelación temporal que la estacional, u_t debería ser un ruido blanco para que el modelo fuera adecuado. Sin embargo, en la mayor parte de las series existe una fuerte inercia: esto es, lo que haya pasado con la variable en los momentos inmediatamente precedentes tiene un gran peso en lo que sucede actualmente.

Esto significa que podemos esperar que u_t , u_{t-1} , u_{t-2} , ... etc., estén correlacionados. Podemos, pues, proponer un modelo ARIMA para recoger esa autocorrelación:

$$\Phi(B)(1-B)^d u_t = \theta(B) a_t$$

El modelo ARIMA (p, d, q) propuesto recoge la estructura de autocorrelación en u_t , convirtiéndolo en un ruido blanco.

Para la serie inicial X_t , que contiene estructura regular y estacional, el modelo construido en estas dos etapas resulta ser:

$$\begin{aligned} \Phi_s(B^s) \Phi(B)(1-B^s)^D(1-B)^d X_t^* &= \\ = \theta_s(B^s) \theta(B) a_t \end{aligned}$$

que denominaremos ARIMA (p, d, q) $\times$ (P, D, Q)_s, siendo X_t^* la transformación de X_t que sea estacionaria en varianza.

La forma en que se ha construido el modelo anterior es sencilla: los principios que se han desarrollado inicialmente para construir modelos ARIMA para la estructura regular se aplican de nuevo para proponer el modelo estacional. El resultado es un modelo multiplicativo, en el que la estructura estacional se superpone multiplicativamente a la regular. De hecho, esto supone una estructura relativamente restrictiva.

Podemos verlo apelando a un modelo sencillo.

El modelo ARIMA (0, 0, 1) $\times$ (0, 0, 1)_s resulta ser:

$$X_t = (1 - \theta B)(1 - \theta_s B^s) a_t$$

que desarrollándolo, para $s = 12$, queda:

$$X_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_{12} a_{t-12} + \theta_1 \theta_{12} a_{t-13}$$

Supone la existencia de correlación entre X_t , X_{t-1} , X_{t-11} , X_{t-12} y X_{t-13} . Sin embargo, implica restricciones, ya que

$$E(X_t X_{t-1}) = [-\theta_1 - \theta_1 \theta_{12}] \cdot \sigma^2$$

$$E(X_t X_{t-11}) = [\theta_1 \theta_{12}] \cdot \sigma^2$$

$$E(X_t X_{t-12}) = [-\theta_{12} - \theta_1 \theta_{12}^2] \cdot \sigma^2$$

$$E(X_t X_{t-13}) = [\theta_1 \theta_{12}] \cdot \sigma^2$$

Vemos que, si el modelo es correcto, no sólo existe correlación entre los períodos señalados, sino

que esta correlación debe obedecer a unas determinadas reglas; en particular, $\rho_{11} = \rho_{13}$.

Puede suceder que, existiendo relación entre los períodos señalados, ésta no obedezca las restricciones impuestas. El modelo

$$X_t = a_t - b_1 a_{t-1} - b_{12} a_{t-12} - b_{13} a_{t-13}$$

supondría la misma estructura de interrelación básica, pero no podría tener estructura multiplicativa salvo que $b_{13} = -b_1 b_{12}$.

El hecho de que los modelos multiplicativos supongan una estructura restrictiva se ve compensado por la simplicidad de los mismos. En general, es posible encontrar un modelo multiplicativo ARIMA (p, a, q) $\cdot$ (P, D, Q)_s que se adapte suficientemente bien a las series en estudio, aunque en ocasiones es preciso adoptar una estructura más general.

La construcción de un modelo estacional sigue exactamente los mismos pasos señalados para los no estacionales. La identificación se hará a partir del correlograma simple y parcial de la serie, teniendo en cuenta únicamente correlaciones que correspondan a períodos estacionales, ρ_s , ρ_{2s} , ρ_{3s} , ... etc., y los inmediatamente anteriores y posteriores a éstos. La única dificultad presente en este caso es que es preciso identificar la estacionalidad a partir de información más reducida: p. ej., en una serie mensual, entre 36 correlaciones sólo tres: ρ_{12} , ρ_{24} , ρ_{36} contendrán información útil para identificar la estacionalidad.

La estructura multiplicativa del modelo impone relación entre las correlaciones correspondientes a la parte regular (ρ_1 , ρ_2 , ρ_3 , ...) y las estacionales. Esta relación, llamada a veces interacción, puede ser obtenida para cada modelo, una vez determinada su estructura. Puede verse la forma que la interacción toma para diversas clases de modelos en el trabajo de D. Peña (1979) publicado en Cuadernos Económicos de ICE.

Antes de dejar este apartado, pensemos en el modelo ARIMA estacional descrito, de la siguiente forma:

$$X_t = \frac{\theta_s(B^s)}{\Phi_s(B^s)} \frac{\theta(B)}{\Phi(B)} a_t$$

y comparémoslo con el modelo de componentes no observables multiplicativo mencionado en la sección 1:

$$X_t = T_t S_t e_t$$

Es evidente que podemos hacer corresponder a S_t con $\theta_s(B^s)/\phi_s(B^s)$ y a T_t con $\theta(B)/\phi(B)$. En este sentido un modelo ARIMA estacional identifica las componentes de tendencia y estacionalidad. Sin embargo, lo hace de distinta manera que el modelo de componentes no observables: En efecto, un modelo ARIMA supone que tanto la tendencia como la estacionalidad son estocásticas: sólo se definen aplicando un filtro a la variable a_t , mientras que en el segundo caso, en general, se considera a T_t y S_t deterministas. Si realmente existieran tendencia y estacionalidad determinista, el modelo ARIMA serviría para explicitar el comportamiento del residuo estocástico e_t , que podríamos considerar la serie a explicar.

3.1. Ilustración

Con objeto de ilustrar el proceso que se acaba de describir, procederemos a recorrer con cierto detalle las etapas de la construcción de un modelo para la variable Índice de Producción Industrial. La

serie consta de 229 observaciones mensuales que van desde octubre de 1965 hasta octubre de 1984. Dicha serie, a la que llamaremos IPI o serie original, aparece representada en el gráfico 1.

Se observa de inmediato que la serie no es estacionaria en media (exhibe una clara tendencia creciente), ni en varianza (la amplitud de las oscilaciones de la serie es mucho mayor en las últimas observaciones que en las primeras). Asimismo, se observa que se producen valores mucho más bajos que la media con regularidad constante. Es fácil comprobar que estos valores bajos corresponden siempre al mes de agosto, en el que la actividad industrial casi se paraliza debido a las vacaciones de verano. Podemos por lo tanto esperar que el modelo contenga estructura estacional, para recoger el ciclo anual observado.

Para evitar el aumento de dispersión observado someteremos a la serie a transformación logarítmica. El gráfico 2 presenta la sucesión de valores de la serie log IPI. Puede observarse (al comparar-

GRAFICO 1

Serie IPI

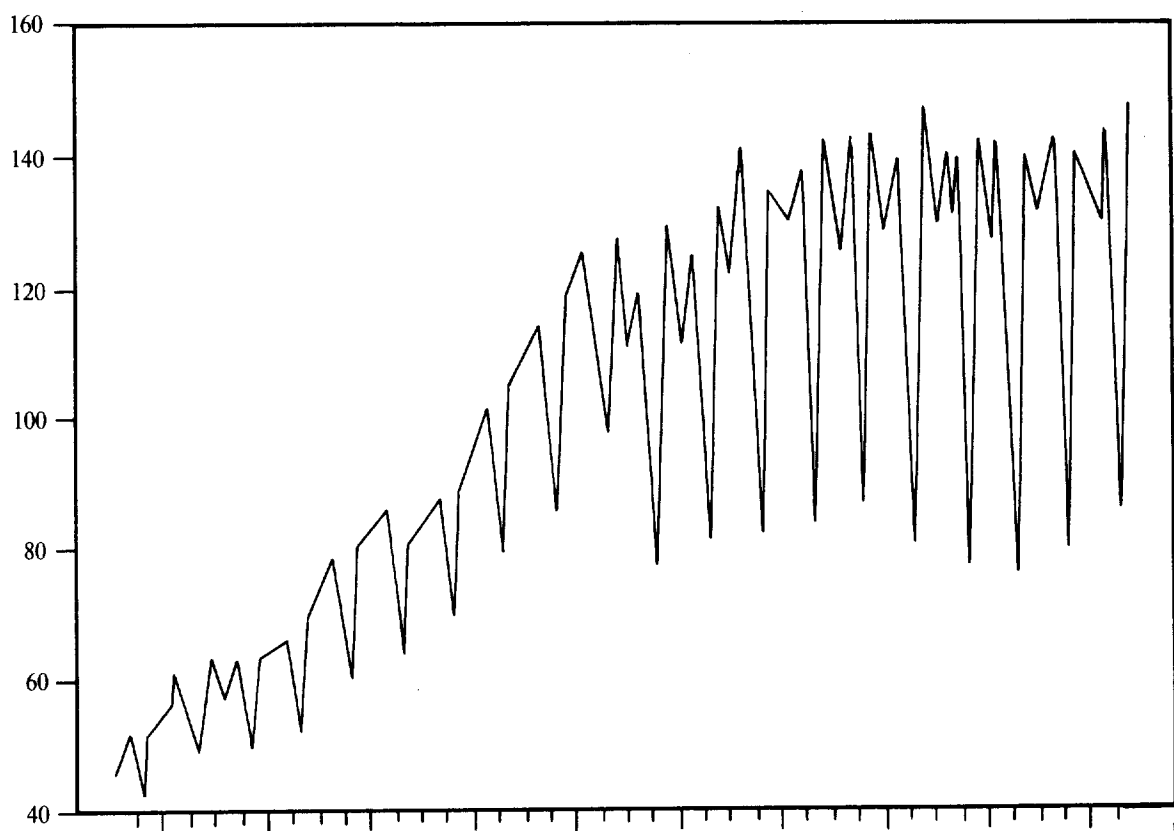
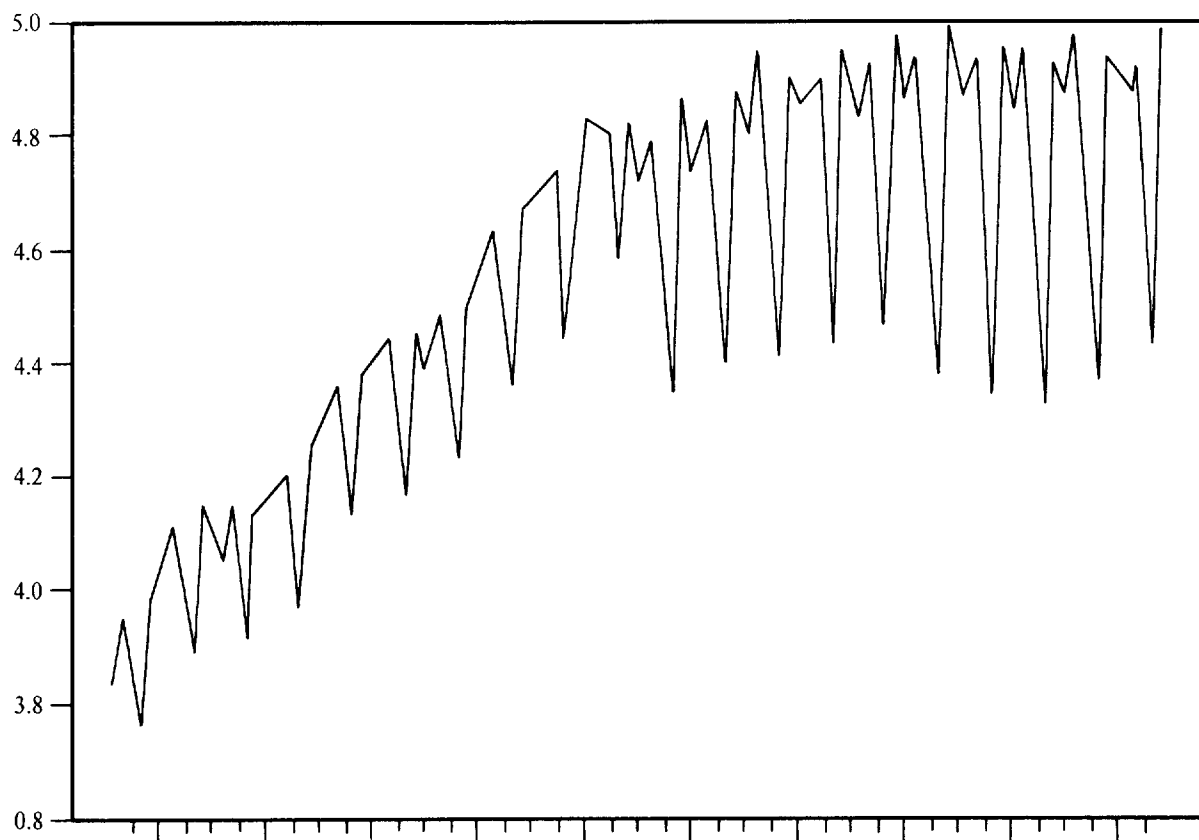


GRAFICO 2

Serie Log. IPI



lo con el gráfico 1) que la dispersión es más homogénea en la serie transformada que en la original, aunque dista mucho de ser totalmente homogénea. Es posible que si probáramos la transformación de Box-Cox para valores diferentes de 0 en el intervalo (0, 1) encontráramos una transformación que establezca la varianza. No obstante, para este ejercicio nos conformaremos con la transformación logarítmica.

La serie log IPI presenta también tendencia creciente, por lo que podemos esperar que su correlograma estimado presente comportamiento no estacionario, con correlaciones que no tiendan rápidamente a cero. El gráfico 3 confirma esta impresión.

Por lo tanto, tomaremos una diferencia de orden 1 con objeto de hacer la serie estacionaria en media. El gráfico 4 presenta las observaciones

de la serie $\Delta \log \text{IPI}$ y puede verse que la serie está centrada ahora alrededor del valor cero. El gráfico 5 presenta el correlograma estimado de dicha serie. En él se observa que las primeras autocorrelaciones tienden rápidamente hacia cero (sólo la primera es significativamente distinta de cero en el contraste con la distribución normal. Las cruces horizontales en el gráfico indican el intervalo $\pm 2\sigma$). Sin embargo, en los retardos 12, 24, 36 observamos autocorrelaciones muy importantes que no decrecen hacia cero. Este correlograma parece indicar que la serie $\Delta \log \text{IPI}$ es estacionaria en su parte regular (correlación entre $X_t, X_{t-1}, X_{t-2} \dots$), pero no lo es en su parte estacional (correlación entre $X_t, X_{t-12}, X_{t-24} \dots$). Por lo tanto tomaremos, en la serie $\Delta \log \text{IPI}$, una diferencia estacional (de orden 12, por ser los datos mensuales) para tratar de obtener una estructura estacional estacionaria.

GRAFICO 3
Correlograma Serie Log. IPI

AUTOCORRELATIONS

1- 12	.85	.82	.81	.82	.80	.81	.78	.78	.74	.74	.74	.85
ST.E.	.07	.10	.13	.15	.17	.18	.20	.21	.22	.23	.24	.25
13- 24	.72	.68	.67	.68	.66	.66	.64	.64	.60	.59	.60	.69
ST.E.	.27	.27	.28	.29	.30	.30	.31	.31	.32	.32	.33	.33
25- 36	.57	.53	.52	.53	.51	.51	.48	.48	.45	.44	.44	.53
ST.E.	.34	.34	.35	.35	.35	.36	.36	.36	.37	.37	.37	.37

PLOT OF AUTOCORRELATIONS

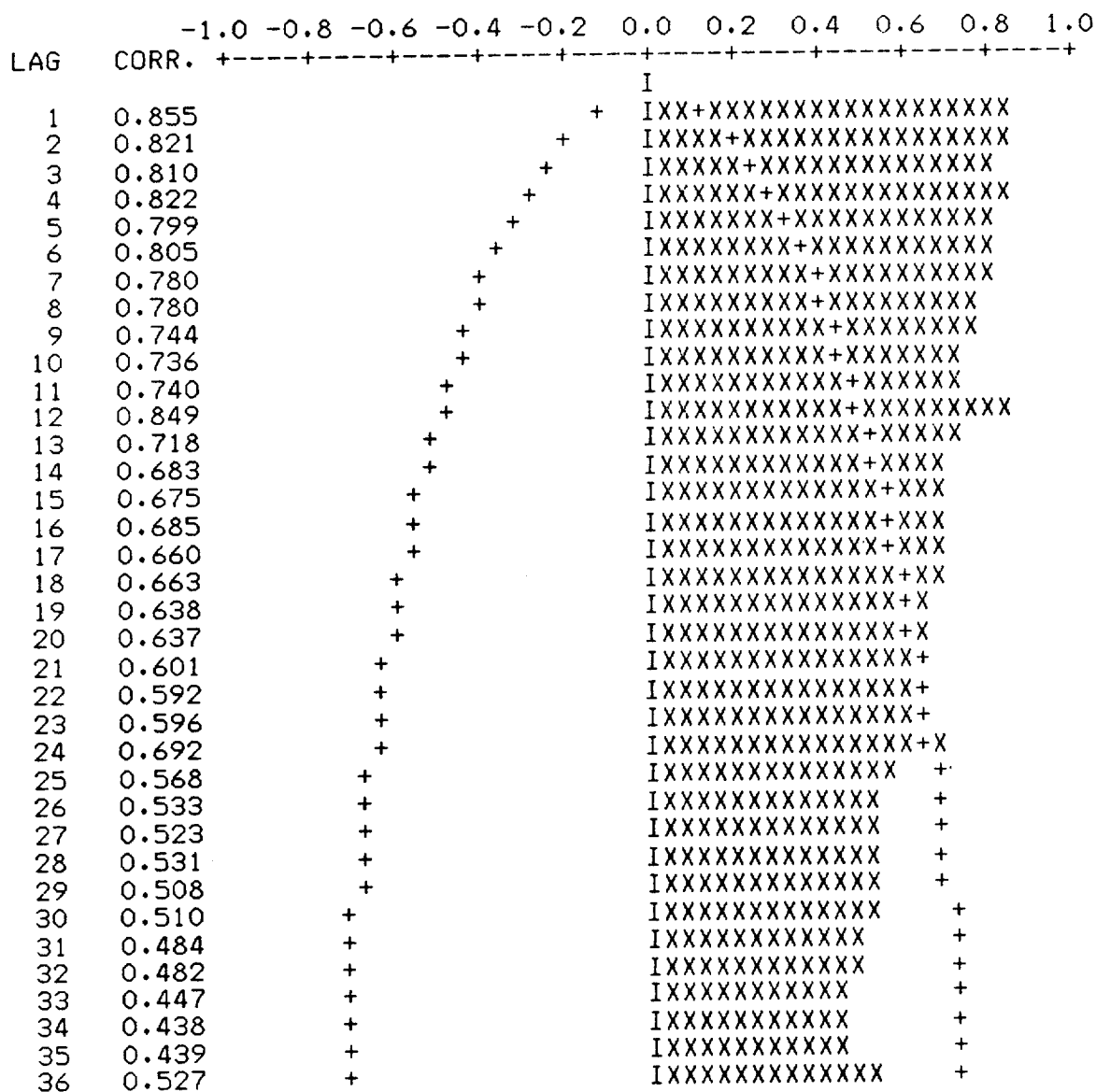
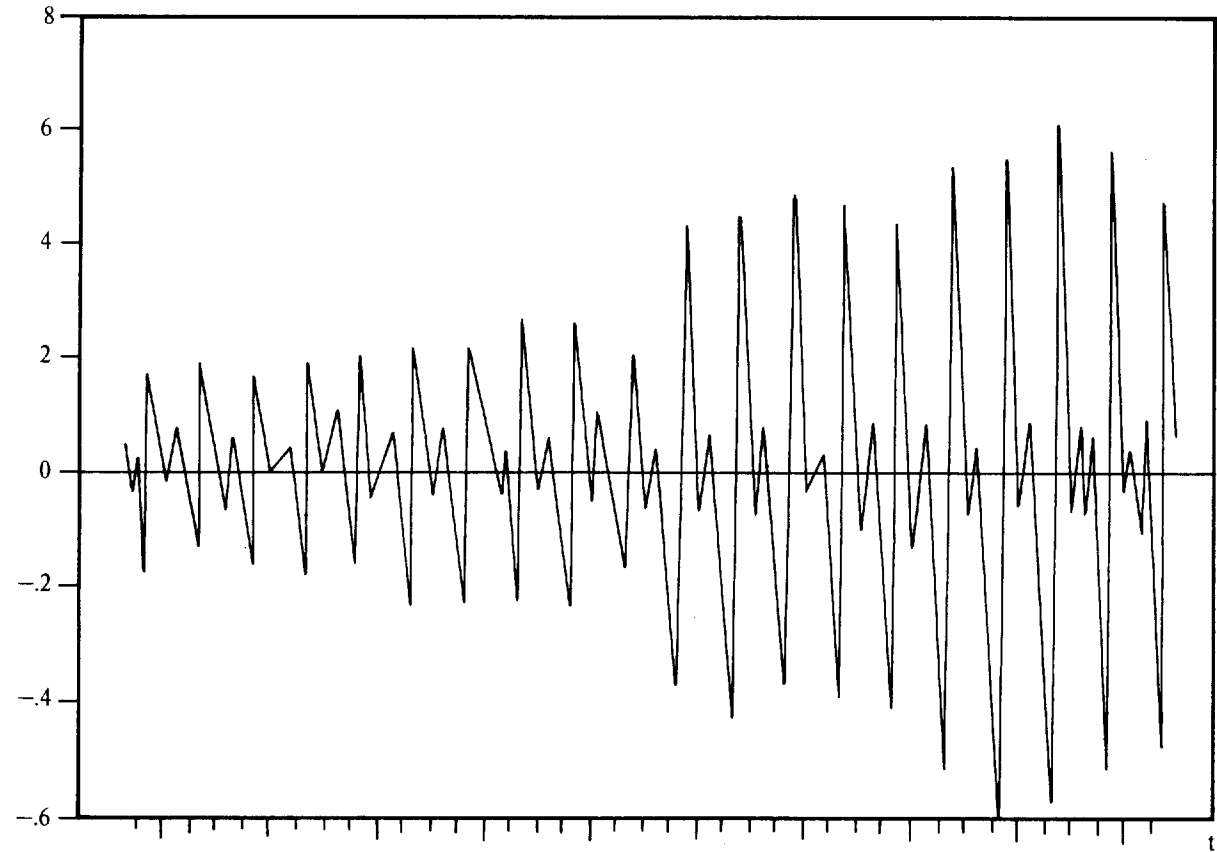
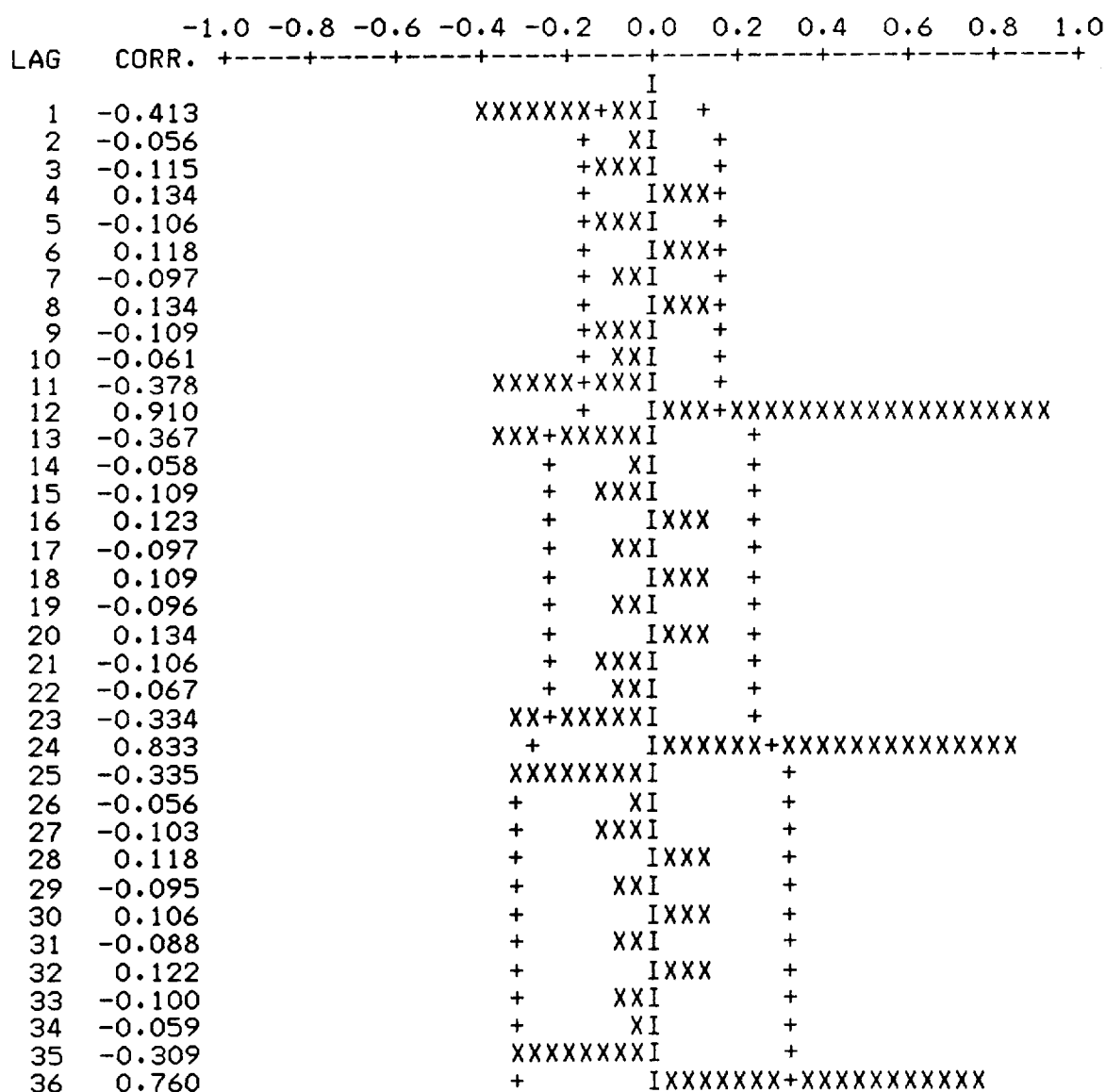


GRAFICO 4
Serie Δ Log. IPI





La serie $\Delta_{12} \log \text{IPI}$ aparece en el gráfico 6. De nuevo, está centrada alrededor del valor cero. Su correlograma (gráfico 7) parece corresponder al de una serie estacionaria, tanto en la parte regular como en la parte estacional. Las únicas autocorrelaciones que aparecen significativas son las correspondientes a los retardos 1, 12, 23 y 24. Al mismo tiempo, se observa que en los retardos 11 y 13, y en los 23 y 25, existen valores similares que podrían reflejar las interacciones correspondientes a θ_1 y θ_{12} y θ_1 y θ_{24} en un modelo del tipo ARIMA $(0, 0, 1) \times (0, 0, 1)_{12}$. La función de autocorrelación parcial de la serie $\Delta_{12} \log \text{IPI}$ (gráfico 8) es compatible con la que se derivaría de dicho modelo. Por lo tanto, el modelo identificado es:

$$(1) \quad \Delta_{12} \log \text{IPI}_t = (1 - \theta_1 B) (1 - \theta_{12} B^{12}) a_t$$

Los resultados de la estimación de este modelo aparecen en la tabla 1. La primera estimación

que aparece corresponde al método de mínimos cuadrados condicionados. La segunda, más precisa, hace uso del método de Back-forecasting. El modelo estimado resulta ser:

$$\Delta_{12} \log \text{IPI}_t = (1 - \underset{(0,052)}{0,6301} B) (1 - \underset{(0,0607)}{0,462} B^{12}) a_t$$

Ambos parámetros son significativamente distintos de cero y distintos de 1, y están estimados con una precisión bastante alta. El ajuste del modelo $\left(\frac{\text{varianza explicada}}{\text{varianza } \Delta_{12} \log \text{IPI}} \right)$ es del 49%.

Conviene, sin embargo, notar que, como siempre que se toman diferencias para hacer la serie estacionaria, la varianza de la serie transformada es una parte muy pequeña de la de la serie original. Esto es, la mayor parte de la variación de $\log \text{IPI}$ viene recogida por la tendencia regular y la tendencia estacional.

GRÁFICO 6

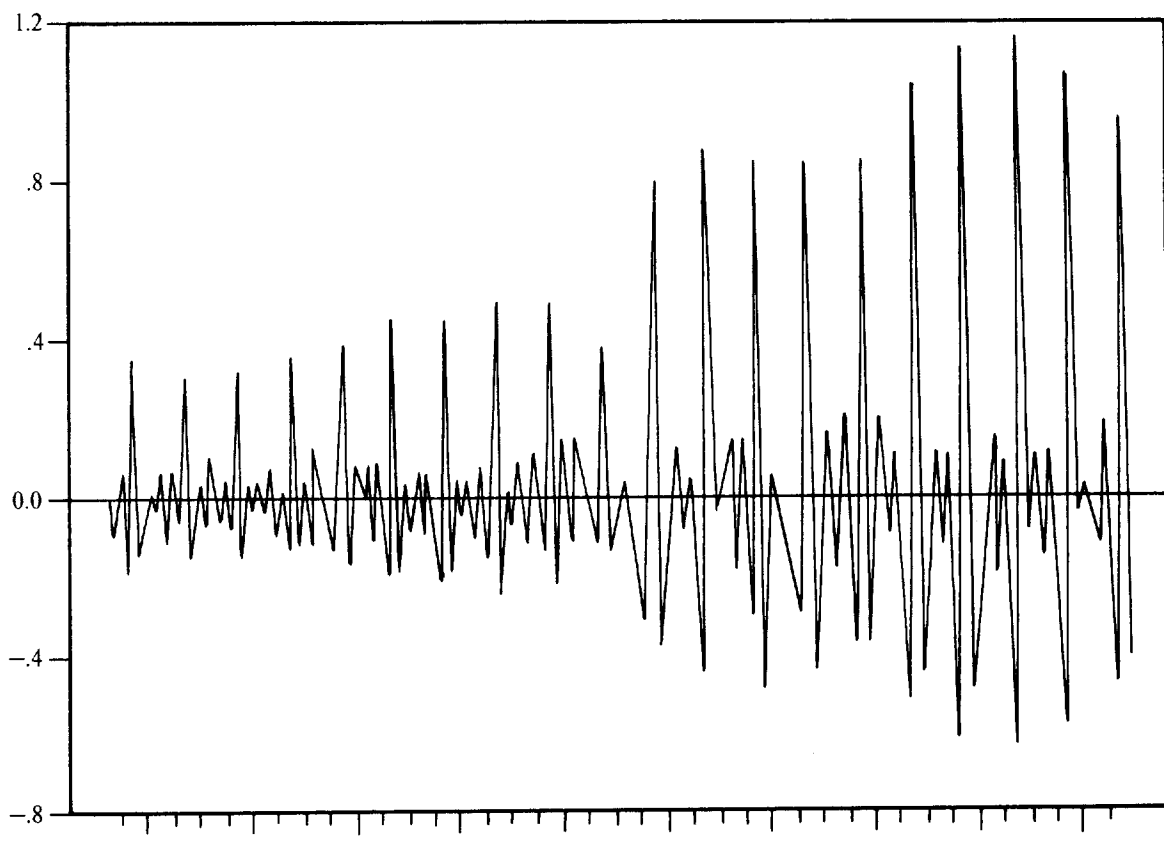
Serie $\Delta_{12} \log \text{IPI}$ 

GRAFICO 7

Correlograma Serie $\Delta\Delta_{12}$ Log. IPI

AUTOCORRELATIONS

1- 12	-.50	.10	-.01	-.04	-.04	.03	.05	0.0	.08	-.07	.06	-.24
ST.E.	.07	.08	.08	.08	.08	.08	.08	.08	.08	.08	.08	.08
13- 24	.13	.02	-.02	-.06	.11	-.09	-.03	.01	.06	-.19	.27	-.15
ST.E.	.09	.09	.09	.09	.09	.09	.09	.09	.09	.09	.09	.10
25- 36	-.07	.10	-.06	.01	-.01	.09	-.09	.07	-.07	.07	-.08	.02
ST.E.	.10	.10	.10	.10	.10	.10	.10	.10	.10	.10	.10	.10

PLOT OF AUTOCORRELATIONS

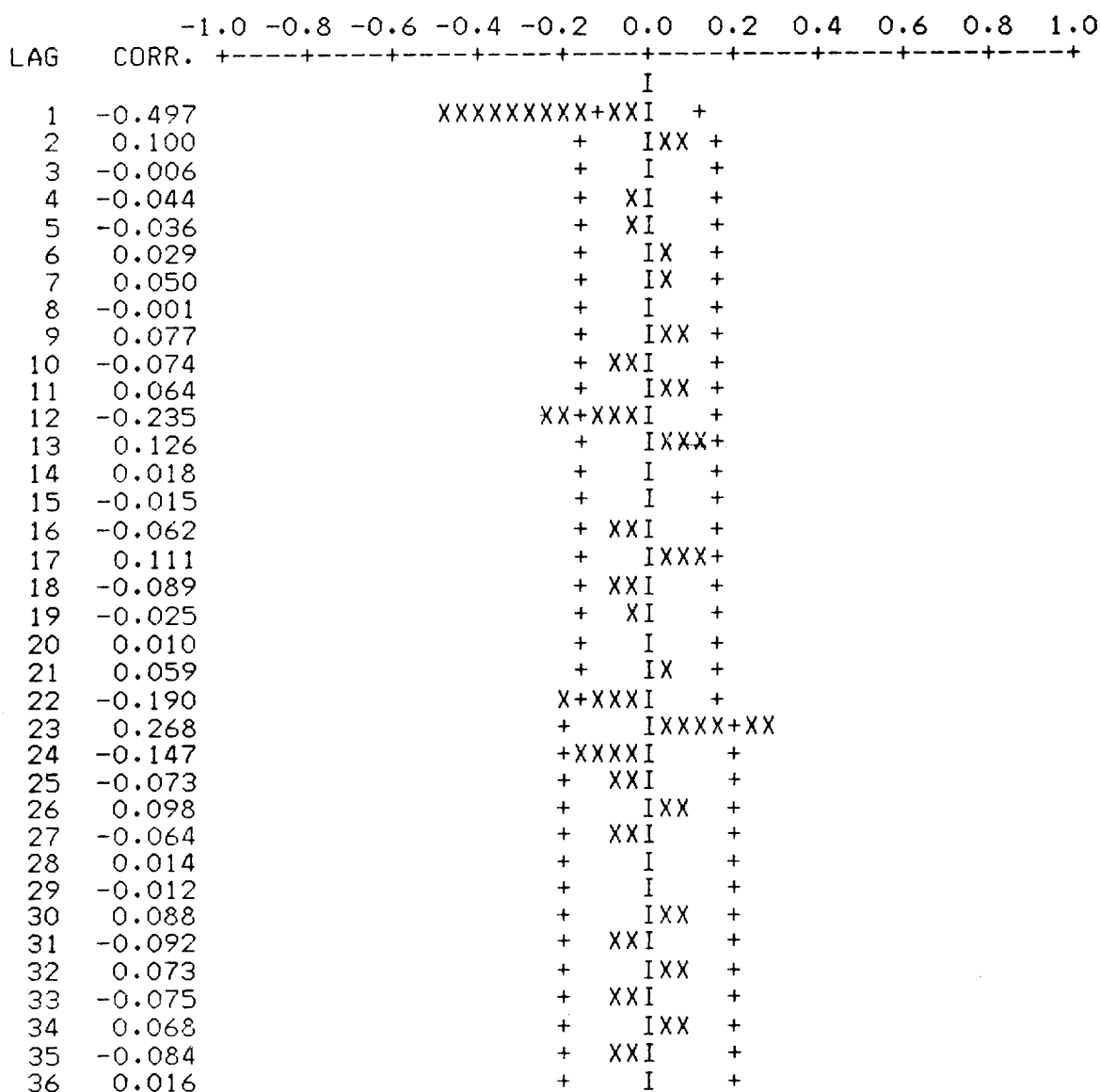


GRAFICO 8

Correlograma parcial Serie $\Delta\Delta_{12}$ Log. IPI

PARTIAL AUTOCORRELATIONS

1- 12	-.50	-.20	-.06	-.08	-.13	-.07	.05	.07	.16	.06	.10	-.22
ST.E.	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07
13- 24	-.16	-.02	0.0	-.16	-.05	-.04	-.04	-.04	.13	-.17	.11	-.01
ST.E.	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07
25- 36	-.17	-.06	-.05	-.12	-.06	.05	-.04	0.0	.05	-.02	0.0	-.08
ST.E.	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07

PLOT OF PARTIAL AUTOCORRELATIONS

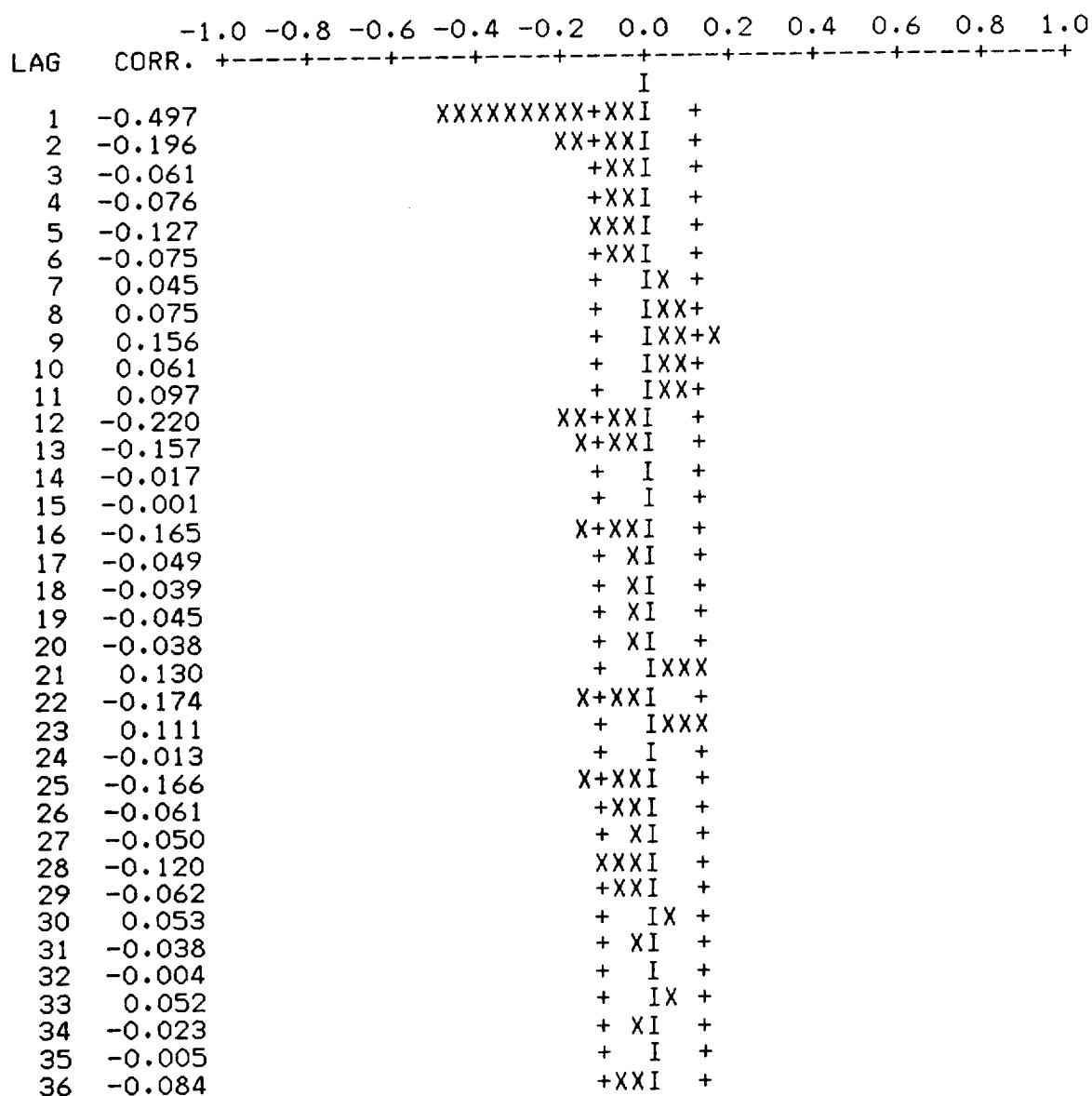


TABLA 1

SUMMARY OF THE MODEL

OUTPUT VARIABLE -- lipi
 INPUT VARIABLES -- NOISE

VARIABLE	VAR.	TYPE	MEAN	TIME	DIFFERENCES	
					1	12
lipi		RANDOM		1- 229	(1-B)	(1-B)

PARAMETER	VARIABLE	TYPE	FACTOR	ORDER	ESTIMATE	ST. ERR.	T-RATIO
1	lipi	MA	1	1	0.6151	0.0538	11.44
2	lipi	MA	2	12	0.4459	0.0622	7.16

RESIDUAL SUM OF SQUARES = 0.060922
 DEGREES OF FREEDOM = 214
 RESIDUAL MEAN SQUARE = 0.000285

ESTIMATION BY BACKCASTING METHOD

RELATIVE CHANGE IN RESIDUAL SUM OF SQUARES LESS THAN 0.1000E-04

SUMMARY OF THE MODEL

OUTPUT VARIABLE -- lipi
 INPUT VARIABLES -- NOISE

VARIABLE	VAR.	TYPE	MEAN	TIME	DIFFERENCES	
					1	12
lipi		RANDOM		1- 229	(1-B)	(1-B)

PARAMETER	VARIABLE	TYPE	FACTOR	ORDER	ESTIMATE	ST. ERR.	T-RATIO
1	lipi	MA	1	1	0.6301	0.0522	12.07
2	lipi	MA	2	12	0.4629	0.0607	7.63

RESIDUAL SUM OF SQUARES = 0.059582
 DEGREES OF FREEDOM = 214
 RESIDUAL MEAN SQUARE = 0.000278
 (BACKCASTS EXCLUDED)

Los residuos del modelo presentan un correlograma (gráfico 9) con correlaciones no significativas y sin ninguna estructura identificable, y el valor del estadístico de Box-Pierce es menor que el valor de una X^2 con los grados de libertad correspondientes.

Sin embargo, el hecho de que la correlación de orden 22 (única significativamente distinta de cero), esté próxima a un retardo estacional (24) puede indicar que la estacionalidad no está sufi-

cientemente bien recogida. Por esta razón, se prueban los modelos:

$$(2) \Delta_{12} \log IPI_t =$$

$$= (1 - \theta_1 B) (1 - \theta_{12} B^{12} - \theta_{24} B^{24}) a_t$$

$$(3) \Delta_{12} \log IPI_t =$$

$$= (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2) (1 - \theta_{12} B^{12}) a_t$$

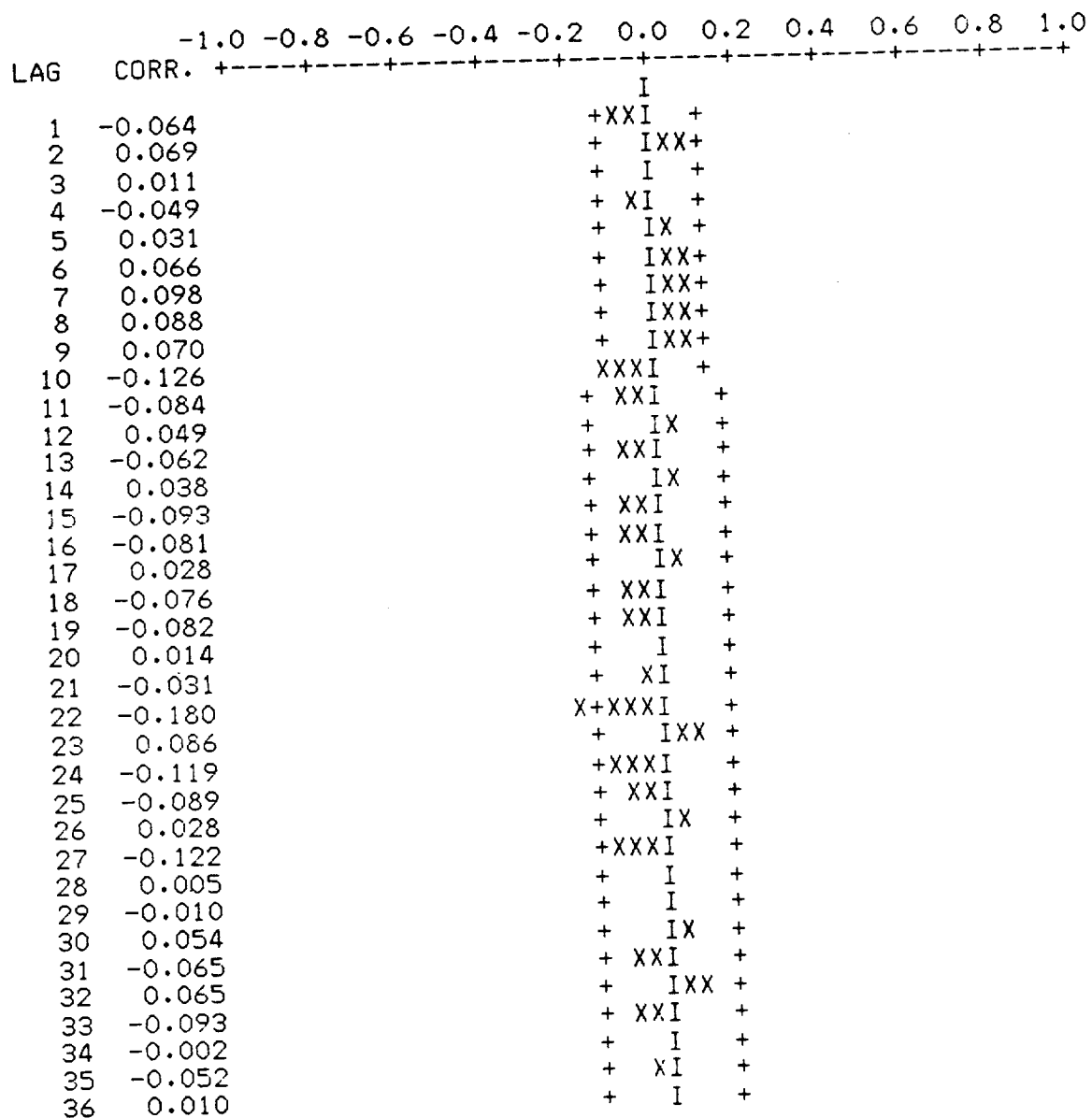
GRAFICO 9

Correlograma residuos modelo (1)

AUTOCORRELATIONS

1- 12	-.06	.07	.01	-.05	.03	.07	.10	.09	.07	-.13	-.08	.05
ST.E.	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07
13- 24	-.06	.04	-.09	-.08	.03	-.08	-.08	.01	-.03	-.18	.09	-.12
ST.E.	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.08	.08
25- 36	-.09	.03	-.12	.01	-.01	.05	-.07	.06	-.09	0.0	-.05	.01
ST.E.	.08	.08	.08	.08	.08	.08	.08	.08	.08	.08	.08	.08

PLOT OF AUTOCORRELATIONS



En ninguno de los dos casos resulta el nuevo parámetro significativo ni se elimina la significación de la correlación de orden 22 (ver tabla 2 y gráfico 10 para el modelo (2), tabla 3 y gráfico 11, para el modelo (3)).

Otra cuestión a considerar es la siguiente: Se ha propuesto un modelo multiplicativo que, tal como se argumentó, es restrictivo. ¿Podría un mode-

lo no multiplicativo ajustarse mejor a los datos? Dado el ajuste obtenido y el correlograma de la serie que se modeliza (en el que se ha observado la presencia de interacciones) no es previsible que esto suceda. No obstante, con objeto de completar la ilustración, se ha estimado el modelo.

$$(4) \Delta I_{12} \log IPI_t = (1 + a_1 B + a_{12} B^{12} + a_{13} B^{13}) a_t$$

TABLA 2

SUMMARY OF THE MODEL

OUTPUT VARIABLE -- lipi
INPUT VARIABLES -- NOISE

VARIABLE	VAR.	TYPE	MEAN	TIME	DIFFERENCES
					1 12
lipi	RANDOM			1- 229	(1-B) (1-B)

PARAMETER	VARIABLE	TYPE	FACTOR	ORDER	ESTIMATE	ST. ERR.	T-RATIO
1	lipi	MA	1	1	0.6135	0.0541	11.35
2	lipi	MA	2	12	0.3786	0.0697	5.43
3	lipi	MA	2	24	0.8918E-01	0.0702	1.27

RESIDUAL SUM OF SQUARES = 0.060457
DEGREES OF FREEDOM = 213
RESIDUAL MEAN SQUARE = 0.000284

ESTIMATION BY BACKCASTING METHOD

RELATIVE CHANGE IN RESIDUAL SUM OF SQUARES LESS THAN 0.1000E-04

SUMMARY OF THE MODEL

OUTPUT VARIABLE -- lipi
INPUT VARIABLES -- NOISE

VARIABLE	VAR.	TYPE	MEAN	TIME	DIFFERENCES
					1 12
lipi	RANDOM			1- 229	(1-B) (1-B)

PARAMETER	VARIABLE	TYPE	FACTOR	ORDER	ESTIMATE	ST. ERR.	T-RATIO
1	lipi	MA	1	1	0.6273	0.0527	11.90
2	lipi	MA	2	12	0.4045	0.0682	5.93
3	lipi	MA	2	24	0.7548E-01	0.0673	1.12

RESIDUAL SUM OF SQUARES = 0.059375
DEGREES OF FREEDOM = 213
RESIDUAL MEAN SQUARE = 0.000279
(BACKCASTS EXCLUDED)

GRAFICO 10

Correlograma residuos modelo (2)

AUTOCORRELATIONS

1- 12	-.06	.07	0.0	-.05	.02	.07	.10	.09	.06	-.12	-.10	0.0
ST.E.	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07
13- 24	-.05	.02	-.09	-.07	.03	-.08	-.08	.01	-.04	-.17	.09	-.07
ST.E.	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.08	.08
25- 36	-.10	.02	-.11	.01	0.0	.06	-.05	.06	-.09	0.0	-.07	.05
ST.E.	.08	.08	.08	.08	.08	.08	.08	.08	.08	.08	.08	.08

PLOT OF AUTOCORRELATIONS

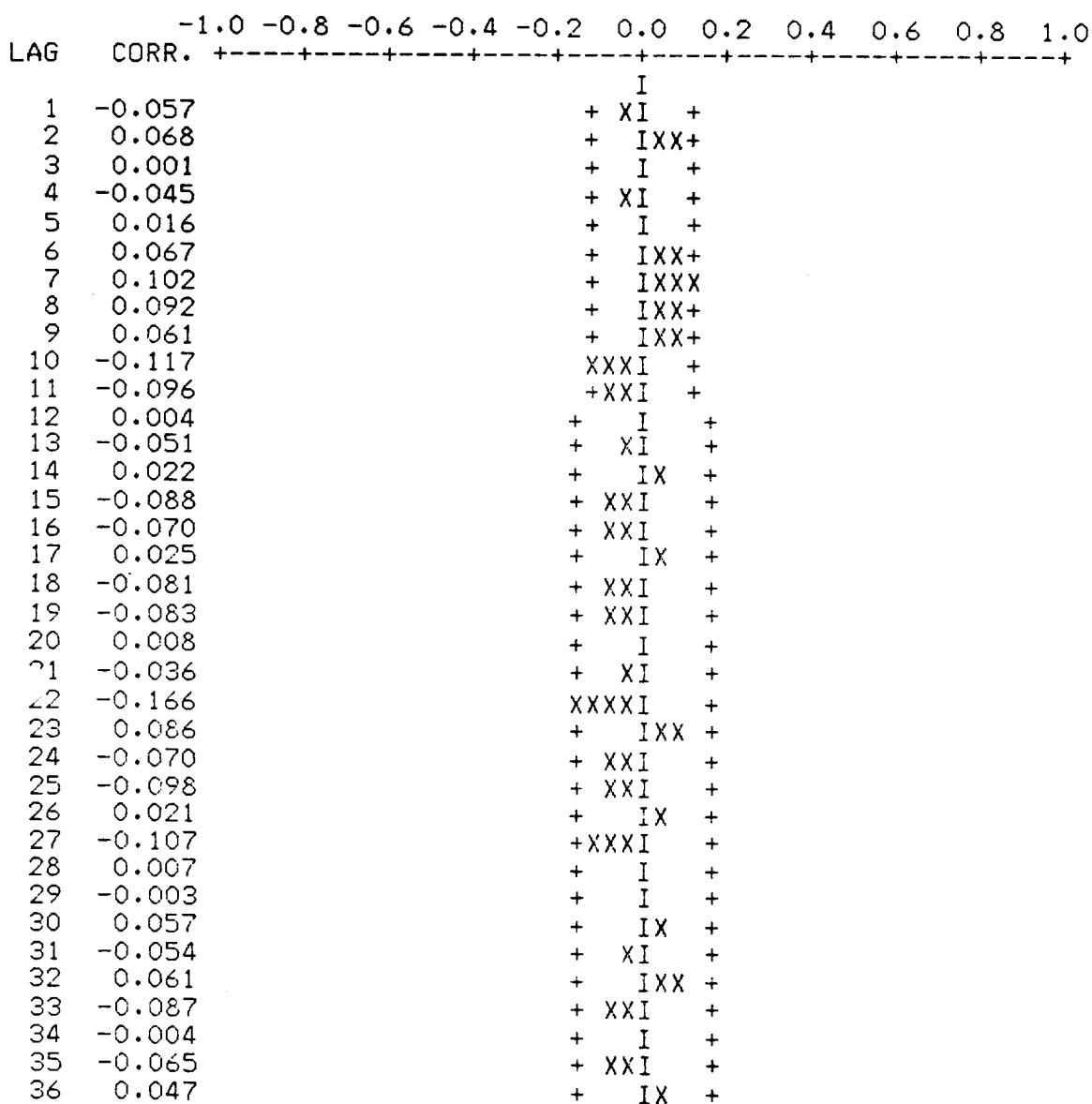


TABLA 3

SUMMARY OF THE MODEL

OUTPUT VARIABLE -- lipi
 INPUT VARIABLES -- NOISE

VARIABLE	VAR. TYPE	MEAN	TIME	DIFFERENCES	
				1	12
lipi	RANDOM		1- 229	(1-B)	(1-B)

PARAMETER	VARIABLE	TYPE	FACTOR	ORDER	ESTIMATE	ST. ERR.	T-RATIO
1	lipi	MA	1	1	0.6701	0.0686	9.77
2	lipi	MA	1	2	-0.8237E-01	0.0688	-1.20
3	lipi	MA	2	12	0.4449	0.0626	7.11

RESIDUAL SUM OF SQUARES = 0.060425
 DEGREES OF FREEDOM = 213
 RESIDUAL MEAN SQUARE = 0.000234

ESTIMATION BY BACKCASTING METHOD

RELATIVE CHANGE IN RESIDUAL SUM OF SQUARES LESS THAN 0.1000E-04

SUMMARY OF THE MODEL

OUTPUT VARIABLE -- lipi
 INPUT VARIABLES -- NOISE

VARIABLE	VAR. TYPE	MEAN	TIME	DIFFERENCES	
				1	12
lipi	RANDOM		1- 229	(1-B)	(1-B)

PARAMETER	VARIABLE	TYPE	FACTOR	ORDER	ESTIMATE	ST. ERR.	T-RATIO
1	lipi	MA	1	1	0.6816	0.0683	9.97
2	lipi	MA	1	2	-0.7766E-01	0.0683	-1.14
3	lipi	MA	2	12	0.4621	0.0610	7.57

RESIDUAL SUM OF SQUARES = 0.059176
 DEGREES OF FREEDOM = 213
 RESIDUAL MEAN SQUARE = 0.000278
 (BACKCASTS EXCLUDED)

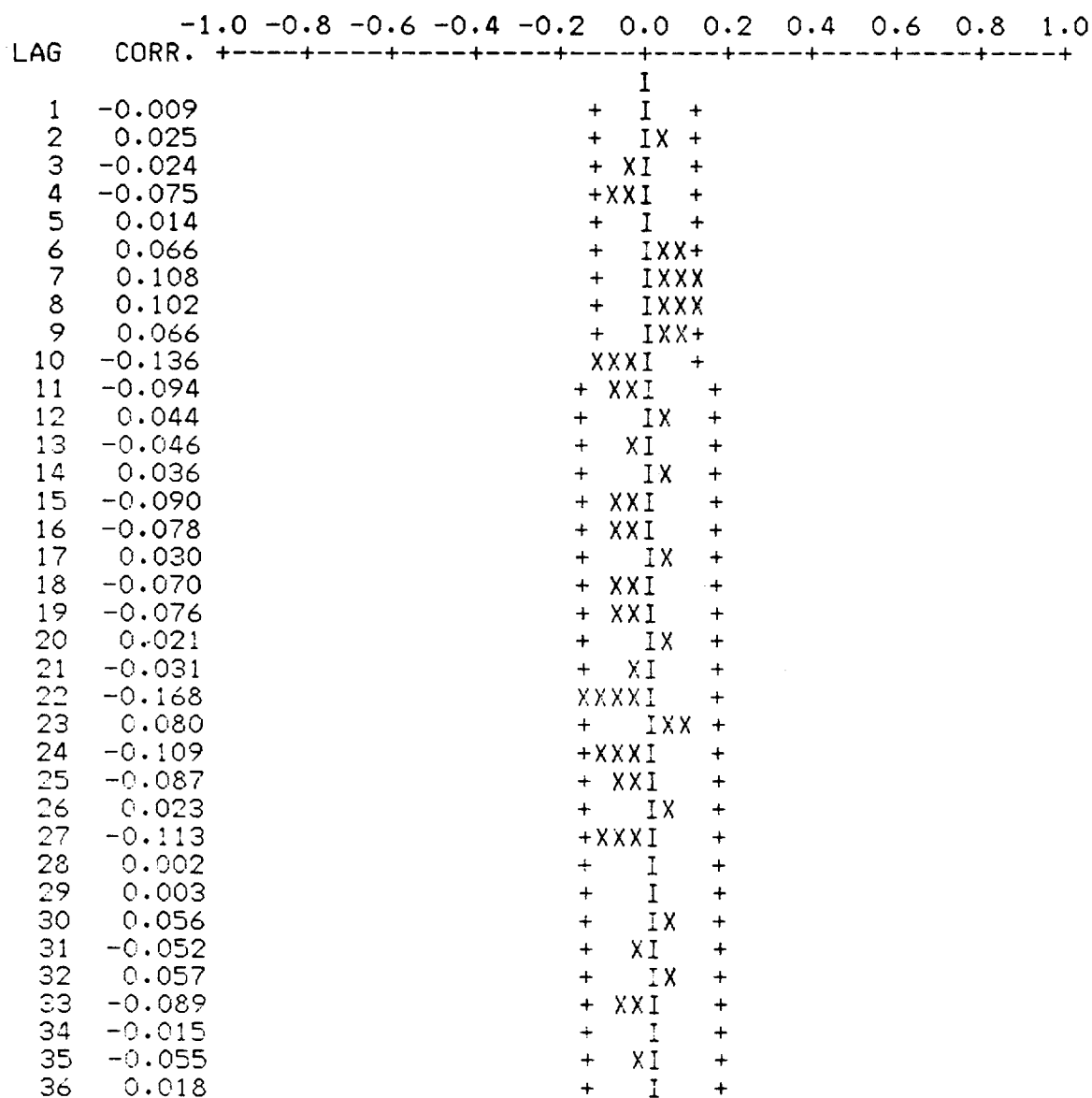
GRAFICO 11

Correlograma residuos modelo (3)

AUTOCORRELATIONS

1- 12	-.01	.02	-.02	-.07	.01	.07	.11	.10	.07	-.14	-.09	.04
ST.E.	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07
13- 24	-.05	.04	-.09	-.08	.03	-.07	-.08	.02	-.03	-.17	.08	-.11
ST.E.	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.08	.08
25- 36	-.09	.02	-.11	0.0	0.0	.06	-.05	.06	-.09	-.01	-.05	.02
ST.E.	.08	.08	.08	.08	.08	.08	.08	.08	.08	.08	.08	.08

PLOT OF AUTOCORRELATIONS



El modelo (1) y el (4) serán equivalentes si

$$a_1 = -\theta$$

$$a_{12} = -\theta_{12}$$

$$a_{13} = \theta_1 \theta_{12}$$

En la tabla 4 aparecen los resultados de la estimación de este modelo: los valores estimados de los coeficientes son:

$$a_1 = -0,6603$$

$$a_{12} = -0,4678$$

$$a_{13} = 0,2183$$

que, comparados con los obtenidos en el modelo (1):

$$\theta_1 = 0,630 \quad \theta_{12} = 0,462 \quad \theta_1 \theta_{12} = -0,29$$

dejan claro que los datos cumplen las restricciones impuestas por el modelo multiplicativo.

Por último, y dado que el modelo (1) resulta adecuado para representar la serie, se ha procedido a predecir valores futuros de la serie. Con objeto de facilitar la predicción, el modelo

$$\Delta I_{12} \log IPI_t = (1 - 0,6301 B) (1 - 0,462 B^{12}) a_t$$

se escribe de la siguiente forma:

$$(1 - B) (1 - B^{12}) \log IPI_t =$$

$$= (1 - B - B^{12} + B^{13}) \log IPI_t =$$

$$= \log IPI_t - \log IPI_{t-1} - \log IPI_{t-12} + \log IPI_{t-13} =$$

$$a_t - 0,6301 a_t - 0,462 a_{t-12} + 0,29 a_{t-13}, \text{ o lo que es lo mismo,}$$

$$(5) \log IPI_t = \log IPI_{t-1} + (\log IPI_{t-12} - \log IPI_{t-13}) +$$

$$+ a_t - 0,6301 a_{t-1} - 0,462 a_{t-12} + 0,29 a_{t-13}$$

$$IPI_t = \text{anti log} [\log IPI_t]$$

TABLA 4

EQUATION 1						
DEPENDENT VARIABLE 6 LIPI112						
FROM 1966: 2 UNTIL 1984: 10						
OBSERVATIONS 225 DEGREES OF FREEDOM 221						
R**2 .38873348 RBAR**2 .38043575						
SSR .32512852 SEE .38355831E-01						
DURBIN-WATSON 2.03612850						
Q(42)= 58.6594 SIGNIFICANCE LEVEL .453398E-01						
NO.	LABEL	VAR	LAG	COEFFICIENT	STAND. ERROR	T-STATISTIC
***	*****	***	***	*****	*****	*****
1	CONSTANT	0	0	-.6603240E-03	.2441149E-03	-2.704971
2	MVG AVGE	-1	1	-.6733789	.4999251E-01	-13.46960
3	MVG AVGE	-1	12	-.4678943	.6100620E-01	-7.669618
4	MVG AVGE	-1	13	.2183539	.6707865E-01	3.255193

correlate resid 66,2 84,10 36 cresid							
AUTOCORRELATIONS OF SERIES 7 RESID VARIANCE .14443E-02							
NUMBER OF OBSERVATIONS 225							
FROM 1966: 2 UNTIL 1984: 10							
1 :	-.022735	.068955	-.002460	-.054579	.025830	.068575	
7 :	.114092	.090257	.050800	-.122377	-.098499	.045004	
13 :	.035069	.069439	-.056814	-.062305	.044115	-.078195	
19 :	-.078839	.014691	-.021920	-.174290	.078384	-.125079	
25 :	-.048959	.039849	-.104967	.003156	-.011742	.056108	
31 :	-.053639	.038693	-.086765	-.007776	-.069503	.007446	

Las predicciones efectuadas con este modelo, a partir del último período muestral, son las siguientes:

	<u>Predicciones</u>		<u>Valores observados</u>
Octubre 84	136,83	Oct. 84	147,00
	140,22		
	136,09		
	135,31		
	136,49		
	141,80		
	128,89		
	141,40		
	134,96		
	134,84		
	83,56		
	135,93		

Sin embargo, no tenemos valores observados posteriores a octubre 84 y, por lo tanto, aunque este procedimiento nos permite predecir lo desconocido, no nos permite saber hasta qué punto son buenas estas predicciones.

Para evitar este problema suele utilizarse el procedimiento de predicción ex-post: Esto es, los valores finales de la muestra se reservan para servir de punto de comparación a las predicciones y no se usan en el proceso de estimación. De esta manera, y puesto que el modelo ajustado no se basa en esta información, la predicción que realicemos de estos valores será predicción en sentido estricto. El error cometido en la predicción de valores conocidos nos permitirá tener una noción de la bondad de ésta.

Para realizar este ejercicio hemos separado de nuestra muestra original los últimos 12 valores: Esto es, hemos estimado el modelo usando únicamente 217 observaciones de las 229 que tenemos.

En la tabla 5 aparecen los resultados de esta estimación. Puede observarse (comparándola con la tabla 1) que el modelo es muy estable, ya que los coeficientes estimados apenas cambian por la eliminación de las últimas 12 observaciones.

Las predicciones realizadas con la fórmula (5), usando los resultados de la tabla 5, a partir de la observación 217, así como los valores observados y los errores de predicción son los que aparecen a continuación. El gráfico siguiente muestra la trayectoria seguida por las predicciones y por los valores observados. Puede verse que las predicciones recogen muy bien los puntos de cambio de los valores observados.

	<u>Predicción</u>	<u>Valor observado</u>	<u>Error de predicción</u>
Oct. 83	141,74	138,6	-3,14
	142,95	142,0	-0,95
	134,58	138,3	3,72
	134,06	137,3	3,24
	134,64	138,7	4,06
	145,84	143,3	-2,54
	135,83	129,9	-5,93
	143,11	143,1	-0,01
	139,50	136,3	-3,2
	136,08	136,8	0,72
	80,22	85,09	5,68
	141,44	137,2	4,24

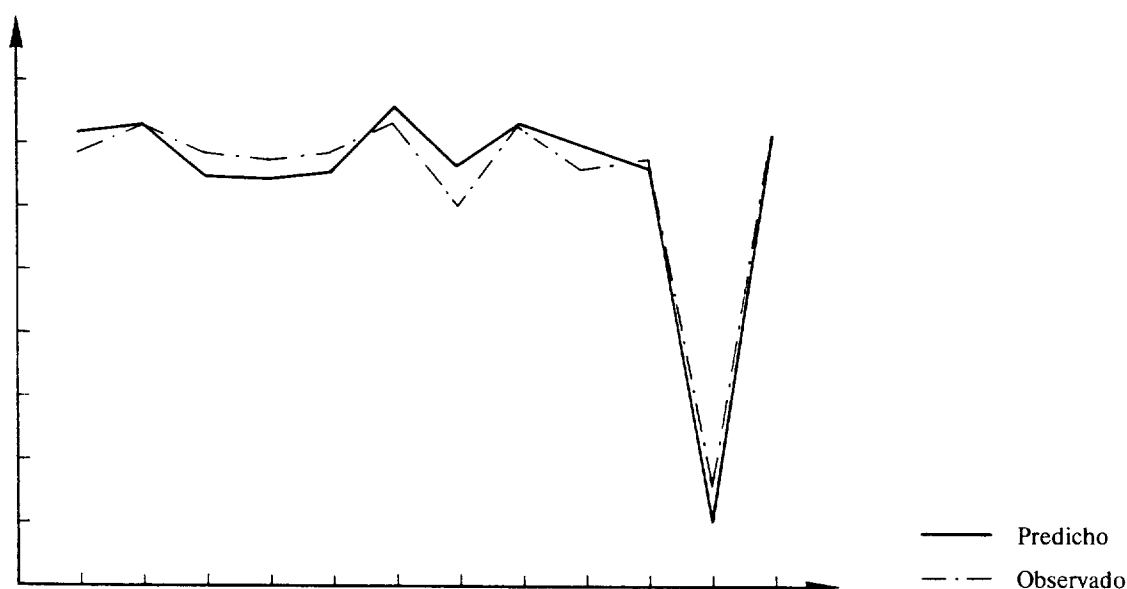


TABLA 5

SUMMARY OF THE MODEL

OUTPUT VARIABLE -- lipi
 INPUT VARIABLES -- NOISE

VARIABLE	VAR.	TYPE	MEAN	TIME	DIFFERENCES	
					1	12
lipi		RANDOM		1- 217	(1-B)	(1-B)

PARAMETER	VARIABLE	TYPE	FACTOR	ORDER	ESTIMATE	ST. ERR.	T-RATIO
1	lipi	MA	1	1	0.6065	0.0561	10.82
2	lipi	MA	2	12	0.4287	0.0643	6.66

RESIDUAL SUM OF SQUARES = 0.058138
 DEGREES OF FREEDOM = 202
 RESIDUAL MEAN SQUARE = 0.000288

ESTIMATION BY BACKCASTING METHOD

RELATIVE CHANGE IN RESIDUAL SUM OF SQUARES LESS THAN 0.1000E-04

SUMMARY OF THE MODEL

OUTPUT VARIABLE -- lipi
 INPUT VARIABLES -- NOISE

VARIABLE	VAR.	TYPE	MEAN	TIME	DIFFERENCES	
					1	12
lipi		RANDOM		1- 217	(1-B)	(1-B)

PARAMETER	VARIABLE	TYPE	FACTOR	ORDER	ESTIMATE	ST. ERR.	T-RATIO
1	lipi	MA	1	1	0.6205	0.0543	11.44
2	lipi	MA	2	12	0.4451	0.0629	7.08

RESIDUAL SUM OF SQUARES = 0.056890
 DEGREES OF FREEDOM = 202
 RESIDUAL MEAN SQUARE = 0.000282
 (BACKCASTS EXCLUDED)

4. ANALISIS MULTIVARIANTE

La teoría de procesos estocásticos desarrollada en las primeras secciones puede generalizarse al caso de vectores k dimensionales

$$X_t = (X_{1t} \ X_{2t} \ \dots \ X_{kt}) \quad t = -\infty, \dots, 0, \dots, \infty$$

que definen un proceso estocástico k -dimensional conjuntamente estacionario.

Es teóricamente posible pensar en modelos ARMA multivariantes descritos por:

$$H(B) X_t = M(B) a_t$$

en los que $H(B)$ y $M(B)$ son matrices $k \times k$ de polinomios en B correspondientes a los vectores k -dimensionales X_t y a_t . Los resultados teóricos son paralelos a los del caso univariante.

La construcción de modelos de esta clase a partir de los datos, sin embargo, supone un orden de dificultad práctica mucho mayor. Es preciso tener en cuenta no sólo las funciones de autocorrelación de cada una de las series sino también las funciones de autocorrelación cruzada entre ellas. El número de parámetros a identificar se eleva fuertemente. Por esta razón, las aplicaciones de esta clase se han limitado a conjuntos reducidos de variables.

Es evidente que se trata de una generalización de gran interés, ya que permite establecer relaciones dinámicas entre variables: Hemos visto que el análisis univariante es útil para establecer las características de una serie y para predecir futuros valores de la misma. Sin embargo, si queremos estudiar relaciones entre variables, tenemos que considerar un contexto multivariante. Ilustraremos las diver-

sas posibilidades que se abren para el caso más simple de dos variables.

Supongamos un proceso estocástico bivalente $z_t = \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix}$ conjuntamente estacionario, que puede representarse por el modelo:

$$H(B) z_t = M(B) a_t$$

$$(1) \quad \begin{bmatrix} h_{11}(B) & h_{12}(B) \\ h_{21}(B) & h_{22}(B) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_t \\ Y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{12}(B) & m_{12}(B) \\ m_{21}(B) & m_{22}(B) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1t} \\ a_{2t} \end{bmatrix}$$

donde a_{1t} , a_{2t} son dos procesos ruido blanco independientes entre sí.

Esto supone que los modelos que generan a ambas variables son, respectivamente,

$$h_{11}(B) X_t + h_{12}(B) Y_t = m_{11}(B) a_{1t} + m_{12}(B) a_{2t}$$

$$h_{21}(B) X_t + h_{22}(B) Y_t = m_{21}(B) a_{1t} + m_{22}(B) a_{2t}$$

La identificación de los polinomios h_{11} , h_{12} , h_{21} , h_{22} , m_{11} , m_{12} , m_{21} , m_{22} permitiría describir el comportamiento conjunto de ambas variables. Los instrumentos para llevar a cabo el análisis de estos modelos están disponibles, pero la construcción de los mismos supone un elevado grado de complicación y debe abordarse tras una experiencia prolongada en el uso de modelos univariantes.

Un caso particularmente interesante es el siguiente: Supongamos que $h_{21}(B) = m_{12}(B) = m_{21}(B) = 0$. En este caso, el modelo se reduce a

$$h_{11}(B) x_t + h_{12}(B) y_t = m_{11}(B) a_{1t}$$

$$h_{22}(B) y_t = m_{22}(B) a_{2t}$$

es decir, la variable y_t se determina independientemente de x_t , mientras que ayuda a la determinación de x_t .

En este caso, podemos proponer para x_t un modelo del tipo

$$x_t = \frac{h_y(B)}{g_y(B)} y_t + \frac{a(B)}{b(B)} a_t \quad (2)$$

que es llamado modelo de *función de transferencia*.

Los modelos de función de transferencia han recibido gran atención, y pueden considerarse como ampliaciones de modelos de regresión. En efecto, el modelo

$$x_t = \frac{h_{y_1}(B)}{g_{y_1}(B)} y_{1t} + \dots + \frac{h_{y_r}(B)}{g_{y_r}(B)} y_{rt} + u_t$$

$$\text{con } u_t = \frac{a(B)}{b(B)} a_t$$

es un modelo de regresión dinámica entre la variable x_t y los regresores $y_{1t}, y_{2t}, \dots, y_{rt}$, con una perturbación aleatoria independiente.

A partir de la estructura (1) puede verse que x_t e y_t están en general relacionadas en ambas direcciones: es decir, x_t influye en y_t e y_t influye en x_t . ¿Hasta qué punto es correcto estimar únicamente una relación entre x_t e y_t como (2) sin reconocer la existencia simultánea de la segunda relación del modelo?

Este problema, muy relacionado con el que aparece en modelos económicos debido a la simultaneidad, ha dado origen al problema de *contraste de causalidad*.

Afirmar que la relación (2) es la única relevante, e interpretarla en términos de que y_t sirve para determinar valores de x_t y no a la inversa sólo es razonable si se cumplen las condiciones estableci-

das para los polinomios h_{21}, m_{12}, m_{21} en (2). De lo contrario, no podrá hablarse de determinación causal unidireccional de y hacia x .

La literatura en el tema de causalidad, iniciada con la definición de causalidad de Granger, es muy extensa. Dado que no vamos a entrar en ella, sirvan estos comentarios para dar fe de su existencia.

Antes de pasar a centrarnos en funciones de transferencia, señalemos brevemente otro desarrollo atribuido principalmente a Sims (Econometrica, enero 1980, y referencias).

De la misma manera que un modelo ARIMA univariante invertible puede escribirse como un modelo autorregresivo infinito, el modelo (1), si se cumplen las condiciones de invertibilidad, puede escribirse como

$$M(B)^{-1} H(B) z_t = a_t$$

lo que generará un modelo bivalente AR(∞) con ponderaciones autorregresivas decrecientes. Básicamente, la propuesta de Sims para construir modelos multivariantes se resume entonces en ajustar polinomios AR suficientemente largos que impliquen a todas las variables del modelo y a sus retardos. Salvo por el problema de que el número de regresores en cada ecuación aumenta fuertemente, con la consiguiente pérdida de grados de libertad, esta propuesta supone un mecanismo sencillo de construcción de modelos. Los resultados pueden ser analizados posteriormente para tratar de encontrar restricciones comunes a los coeficientes que permitan obtener la forma del mecanismo generador de las observaciones.

El procedimiento propuesto por Sims es equivalente, en modelos múltiples, al ajuste sistemático de modelos autorregresivos a cualquier serie hasta lograr un modelo adecuado. Este procedimiento, totalmente automatizado, supone que la serie ha sido generada por un proceso estacionario e invertible. Bajo estas condiciones, existirá algún proceso autorregresivo, de retardo tan largo como sea preciso, que se ajusta suficientemente bien a la serie. La ventaja de la automatización está en que siempre puede seleccionarse un modelo adecuado. El inconveniente básico deriva de que, si la serie ha sido generada por un proceso MA o ARMA, el número de parámetros necesario para representarla a través de un proceso autorregresivo puede ser excesivamente alto.

5. MODELOS DE FUNCION DE TRANSFERENCIA

Tal como ya se ha señalado, estos modelos tratan de recoger la estructura dinámica de interrelación entre variables, suponiendo que la dirección en que se establece esta interrelación puede ser determinada con información a priori.

Esta condición puede ser muy obvia en ocasiones: Si se trata de determinar la producción de un producto agrícola, en el que la cantidad de lluvia caída puede ser un factor determinante, es evidente que la dirección de causalidad va de lluvia a producción, y difícilmente alguien argüirá

que debe ser a la inversa. Sin embargo, en ocasiones es difícil establecer a priori la dirección de influencia entre las variables. En todo caso, ésta es la hipótesis bajo la que los modelos de función de transferencia pueden tener una explicación causal.

Un caso particular de dichos modelos es aquél en el que las variables input, o regresores, son variables ficticias. Este tipo de situaciones permite realizar un análisis de valores extremos de la serie, que se conoce con el nombre de análisis de intervención, y que pasamos a explicar brevemente.

6. ANALISIS DE INTERVENCION

Se denomina intervención a un efecto exógeno ocurrido en una serie en un momento o conjunto de momentos de tiempo. Este efecto puede ser debido a un fenómeno aislado (huelgas, guerras), a la intervención de la autoridad económica (fijando los precios de determinados productos durante un período de tiempo, por ejemplo), o a otras causas.

Una intervención de este tipo tiene un efecto perturbador en el desarrollo normal de una serie, y se manifiesta aumentando o disminuyendo los valores que la serie hubiera tomado si la intervención no hubiera existido.

Existen evidentemente distintas estructuras de intervención, dependiendo de cómo se manifiesta el efecto en la variable afectada.

El análisis de intervención se inscribe, desde el punto de vista metodológico, dentro de los modelos dinámicos de transferencia.

Un modelo de transferencia relaciona, en el caso más simple, dos variables: Y_t a la que llamaremos output, y X_t que denominará el input.

La relación entre ambas variables es causal, suponiéndose que X_t causa las evoluciones de Y_t , a través de un modelo del tipo:

$$Y_t = \frac{\omega(B)}{\delta(B)} X_t + \frac{\theta(B)}{\varphi(B)} a_t = \gamma_t + N_t$$

γ_t representaría la influencia de la variable X_t , y N_t la parte de ruido no explicada por la variable X_t .

En el caso de intervención, la variable X_t tomará, en general, la forma:

$$\xi_t = \begin{cases} 0 & t \in S_t \\ 1 & t \notin S_t \end{cases}$$

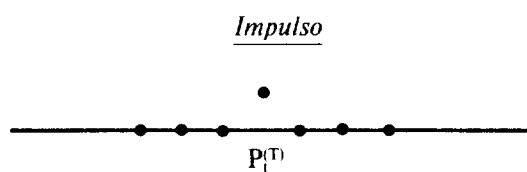
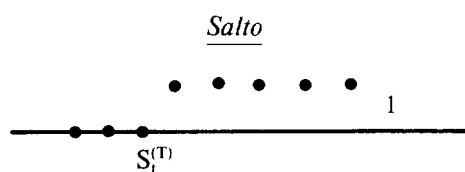
Si se trata de una intervención que se produce en un único momento de tiempo, o intervención impulso, la variable tendrá la forma:

$$\xi_t = \begin{cases} 1 & t = T_1 \\ 0 & t \neq T_1 \end{cases}$$

y si se trata de una intervención que se mantenga durante un número de períodos, y que produzca un salto en el nivel de la serie, tendremos la definición primera para ξ_t .

Es evidente que según cuál sea la forma de los polinomios $\omega(B)$ y $\delta(B)$ la estructura de respuesta a una intervención variará.

Como ilustración, reproducimos las respuestas a distintas estructuras de la función de transferencia presentadas por Box y Tiao (4):



Salto

$$\frac{\omega(B)}{\delta(B)} \cdot S_1^{(T)}$$

$$\frac{\omega B}{1-\delta B} \cdot S_1^{(T)}$$



$$\frac{\omega B}{1-\delta B} \cdot S_1^{(T)}$$

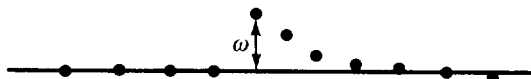


$$\frac{\omega B}{1-B} \cdot S_1^{(T)}$$

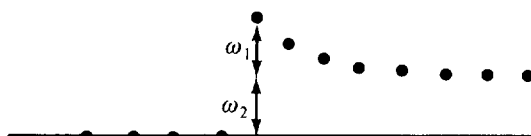
Impulso

$$\frac{\omega(B)}{\delta(B)} \cdot P_1^{(T)}$$

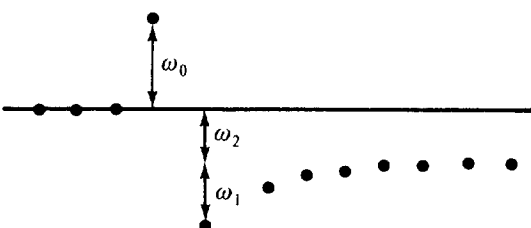
$$\frac{\omega B}{1-\delta B} \cdot P_1^{(T)}$$



$$\left[\frac{\omega_1 B}{1-\delta B} + \frac{\omega_2 B}{1-B} \right] \cdot P_1^{(T)}$$



$$\left[\omega_0 + \frac{\omega_1 B}{1-\delta B} + \frac{\omega_2 B}{1-B} \right] \cdot P_1^{(T)}$$



Hay que señalar también que

$$(1-B) \cdot S_1^{(T)} = P_1^{(T)}$$

es decir, que una intervención salto se convierte en intervención impulso, sin más que tomar una diferencia de la variable intervención.

Centrándonos en la forma más sencilla de intervención: salto o impulso, multiplicado por un coeficiente único ω_0 , vemos que existe un paralelismo importante de esta variable con las variables ficticias usadas en regresión lineal.

Una variable ficticia es incluida en la relación para recoger un efecto que existe en los datos y que, o bien no se puede medir en forma convencional, o no se conocen las causas que lo han producido. La consecuencia del uso de una variable ficticia es una mejora del ajuste. Al mismo tiempo, si la variable ficticia recoge un efecto bien identificado pero no medible, se conseguirá una mejor explicación del comportamiento de la variable endógena, y a través del coeficiente estimado para la variable ficticia, se tendrá una estimación de la magnitud de ese efecto.

Continuando con este paralelismo, la variable de intervención en el análisis de series temporales pretenderá igualmente recoger el efecto de una influencia exógena. Si la intervención está bien identificada y se cree saber la forma en que ha influido en la serie, podrá determinarse de antemano una estructura para la función de transferencia, y la estimación de sus coeficientes nos dará la medida de la magnitud de esa influencia.

Resulta evidente que cualquier comportamiento anómalo en la serie podría ser tratado con una variable ficticia mejorando el ajuste. Esto, sin embargo, no aportaría nada al conocimiento del proceso que generó la serie, pudiendo producir distorsiones.

Por tanto, el uso del análisis de intervención queda reducido a intentar recoger efectos exógenos que se sabe están presentes en la serie, conociéndose el factor que los ha producido y el momento en que tuvieron lugar.

No existe un procedimiento de identificación de la intervención a partir de los propios datos: los valores anómalos indican dónde han podido existir

intervenciones, y el conocimiento de la propia serie y de los acontecimientos que han podido influir en ella será el que permita relacionar valores anómalos con intervenciones concretas. También la posible estructura de la intervención habrá de ser identificada exógenamente, según cuál sea el efecto esperado del acontecimiento exógeno.

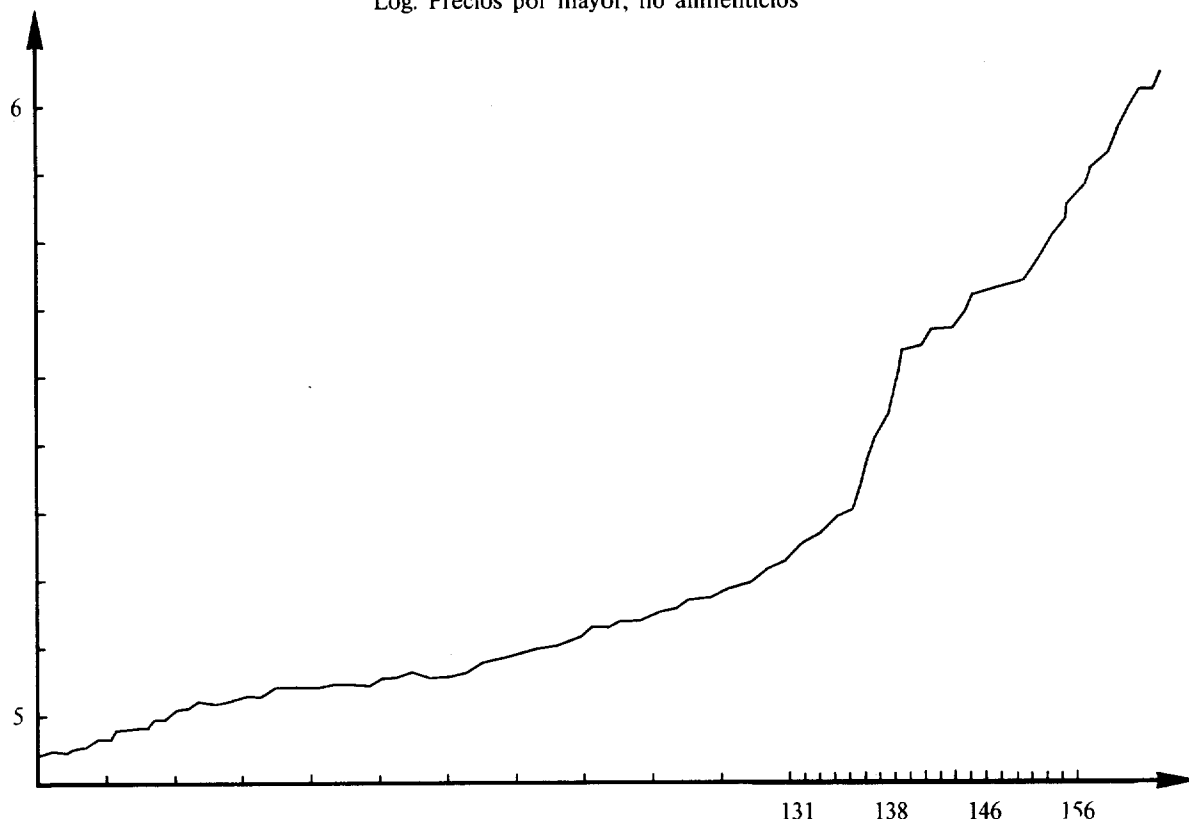
6.1. Ilustración de análisis de intervención

Se trata de una serie española de observaciones mensuales correspondientes a la variable "precios por mayor-no alimenticios". La muestra contiene 183 observaciones correspondientes al período 1963-I a 1978-III. El gráfico (1) muestra la serie original.

Se aprecia claramente en el mismo la no estacionariedad de la serie, así como lo que podríamos denominar cambios de tendencia en su crecimiento: El primero de ellos parece comenzar alrededor de la observación 131, con un fuerte tirón creciente; a partir de la observación 138 se produce un parón en el crecimiento, que de nuevo aparece en

GRAFICO 1

Log. Precios por mayor, no alimenticios



la observación 146 y, sobre todo, a partir de la observación 156.

Las series de precios al por mayor pueden estar muy influenciadas por la política económica del gobierno, así como por los precios de productos importados, sobre los que la influencia del gobierno o de los consumidores es prácticamente nula.

Examinando, por tanto, la política económica en los años a que corresponde la muestra, encontramos los siguientes datos:

1. Con fecha 1 de marzo de 1974 aparecen en el B.O.E. diversas órdenes del Ministerio de Hacienda por las que se fijan nuevos precios para aceites, asfaltos, vaselina, combustibles líquidos, naftas y carburantes. Además, aparece un Decreto del Ministerio de Industria que establece las condiciones del Sistema Integrado de Facturación de Energía Eléctrica, seguido, el día 11 de marzo de 1974, de una orden por la que se establecen nuevas tarifas eléctricas.

2. Con fecha 5 de junio de 1974 aparece en el B.O.E. un Decreto por el que se desarrolla el Decreto-Ley 12/1973 en la parte relativa a Política de Precios, así como el Decreto 1.532/1974, de 22

de mayo, complementario sobre régimen de precios y márgenes comerciales.

3. Con fecha 15 de noviembre de 1975 aparecen de nuevo en el B.O.E. una Orden del Ministerio de Hacienda por la que se modifican los precios de venta al público de determinados productos petrolíferos, así como el Decreto 2.930/1975 del Ministerio de Industria, por el que se establecen nuevas tarifas eléctricas.

Estos tres acontecimientos han podido tener efectos sobre la serie de precios, y corresponden a las siguientes observaciones:

III -74 - obs. 135

VI -74 - obs. 138

XII-75 - obs. 156

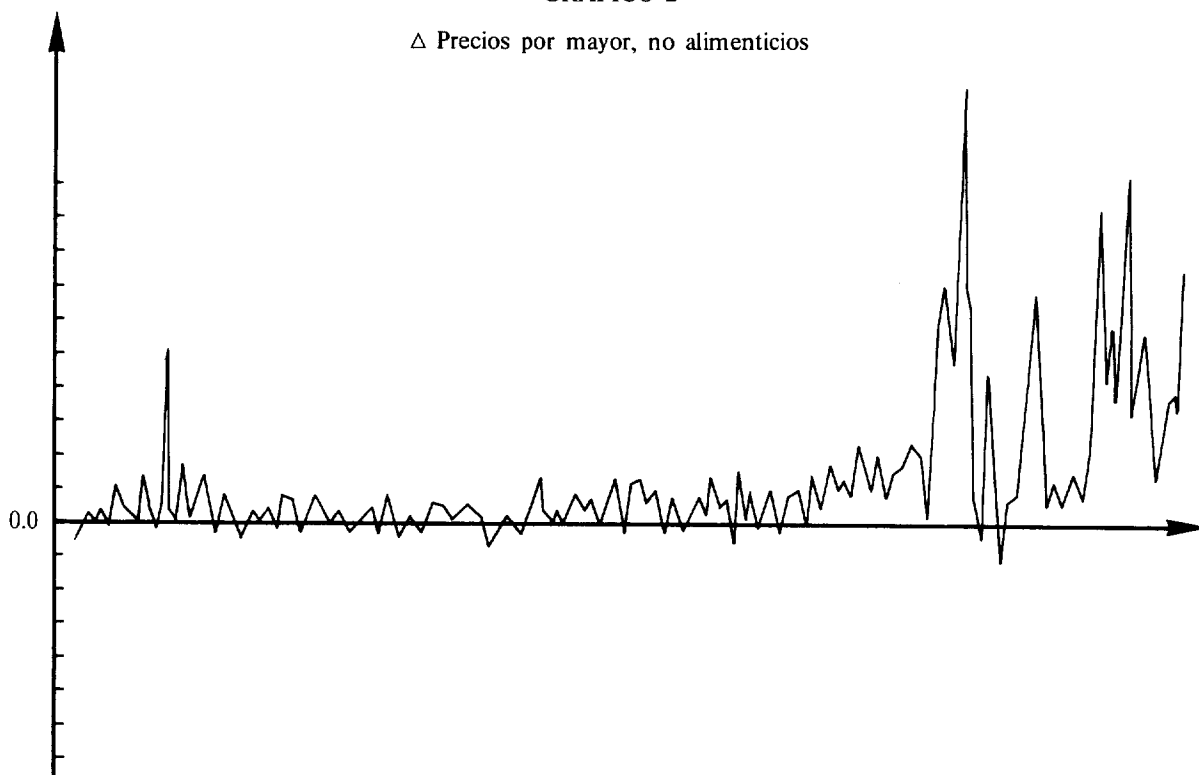
lo que nos lleva a pensar que algunos de los cambios en la serie antes señalados puedan ser explicados por intervenciones exógenas.

Sin embargo, la no estacionariedad de la serie nos exige transformarla, antes de poder tener en cuenta el efecto de posibles intervenciones.

La primera diferencia de la serie aparece en el gráfico (2). Parece efectivamente que existe un cam-

GRAFICO 2

△ Precios por mayor, no alimenticios



bio de nivel en la serie diferenciada a partir de la obs. 131, pero lo que resulta más señalado es el aumento que se produce en la variación de la serie respecto a su media en la última parte.

Sospechando, por tanto, no estacionariedad en varianza y dada la forma de la serie original, se somete a la serie a transformación logarítmica. La estructura general de la serie transformada es muy similar a la sin transformar: Se reduce en parte el incremento de varianza de la parte final de la serie, como puede apreciarse en el gráfico 3, que corresponde a la primera diferencia de la serie transformada, pero sigue subsistiendo un incremento en el nivel de la misma en la última parte.

El correlograma de la serie $\Delta \log \text{IPMNA}$ (gráfico 4) tiende a cero lentamente y evidencia estructura estacional. Sometiendo a la serie a una nueva diferencia de orden 1, $\Delta^2 \log \text{IPMNA}$, el correlograma (gráfico 5) es el de una serie estacionaria, pero la estacionalidad desaparece. Teniendo en cuenta el hecho de que la presencia de intervención puede hacer desaparecer la estructura estacional, se ha tomado una diferencia de orden 12 de esta serie, $\Delta^{12} \log \text{IPMNA}$. Su correlograma simple y parcial (gráficos 6 y 7), aunque no muy limpios, parecen corresponder a un modelo $\text{MA}(1) \times \text{MA}(1)_{12}$.

Para comprobar si el número de diferencias tomado es excesivo, se ha examinado también la serie $\Delta \Delta_{12} \log \text{IPMNA}$. Su correlograma simple y parcial (gráficos 8 y 9) parecen corresponder al modelo $\text{AR}(1) \times \text{MA}(1)_{12}$.

Se estiman, por lo tanto, ambos modelos. Los resultados respectivos son:

$$\text{Mod. 1} - \Delta^2 \Delta_{12} \log \text{IPMNA}_t =$$

$$= (1 - 0,582 B) (1 - 0,843 B^{12}) a_t$$

(0,0632) (0,0343)

$$\text{Mod. 2} - (1 - 0,572 B) \Delta \Delta_{12} \log \text{IPMNA}_t =$$

$$= (1 - 0,818 B^{12}) a_t$$

(0,064) (0,039)

El primer modelo se estima con relativamente mayor precisión que el segundo, aunque ambos son prácticamente iguales, ya que si en el modelo 1 tomamos los factores $(1 - B)$ y $(1 - 0,582)$ y los dividimos entre sí, esperamos obtener algo muy parecido al modelo 2, pero con una estructura de retardos más larga.

GRAFICO 3

$\Delta \text{ Log. Precios por mayor, no alimenticios}$

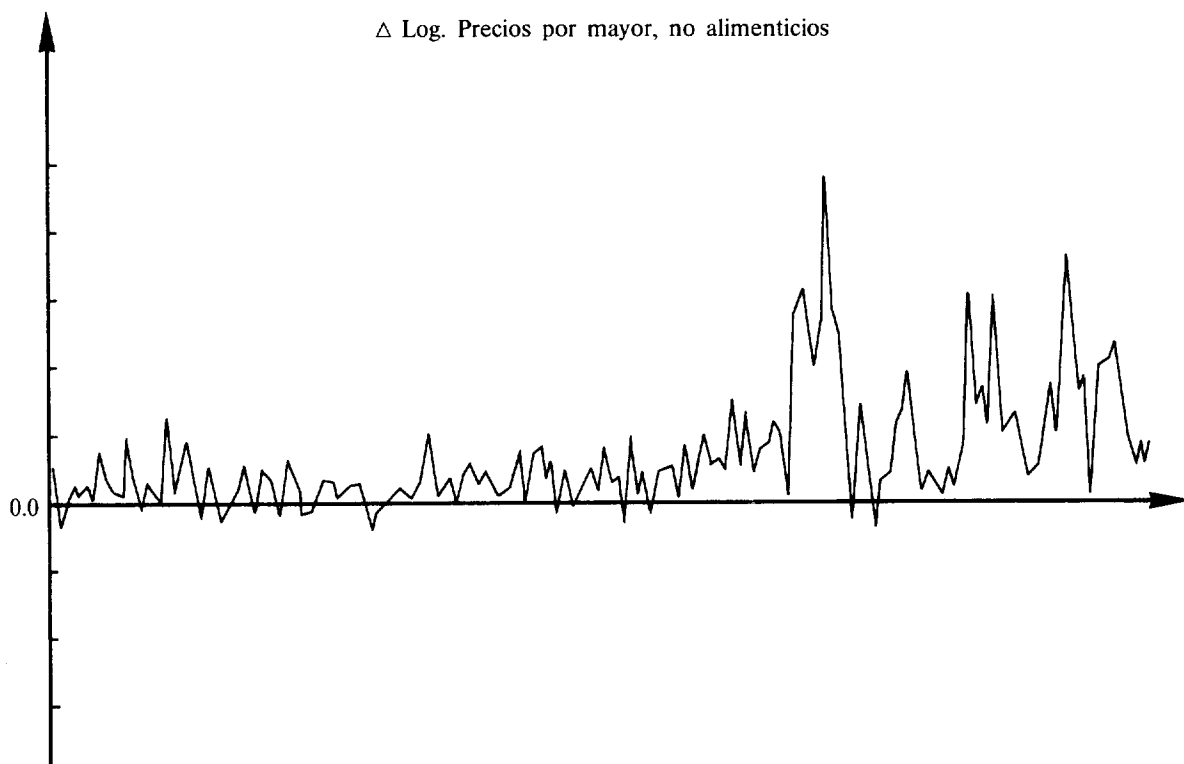


GRAFICO 4

f.a.s. Serie Δ Log. IPMNA

AUTOCORRELATIONS

1- 12	.61	.50	.42	.43	.35	.25	.20	.16	.25	.28	.28	.30
ST.E.	.07	.10	.11	.12	.13	.13	.14	.14	.14	.14	.14	.15
13- 24	.30	.25	.28	.22	.15	.09	.12	.19	.18	.15	.23	.28
ST.E.	.15	.15	.16	.16	.16	.16	.16	.16	.16	.16	.16	.17
25- 36	.27	.23	.18	.18	.16	.17	.10	.12	.12	.12	.20	.26
ST.E.	.17	.17	.17	.17	.18	.18	.18	.18	.18	.18	.18	.18

PLOT OF AUTOCORRELATIONS

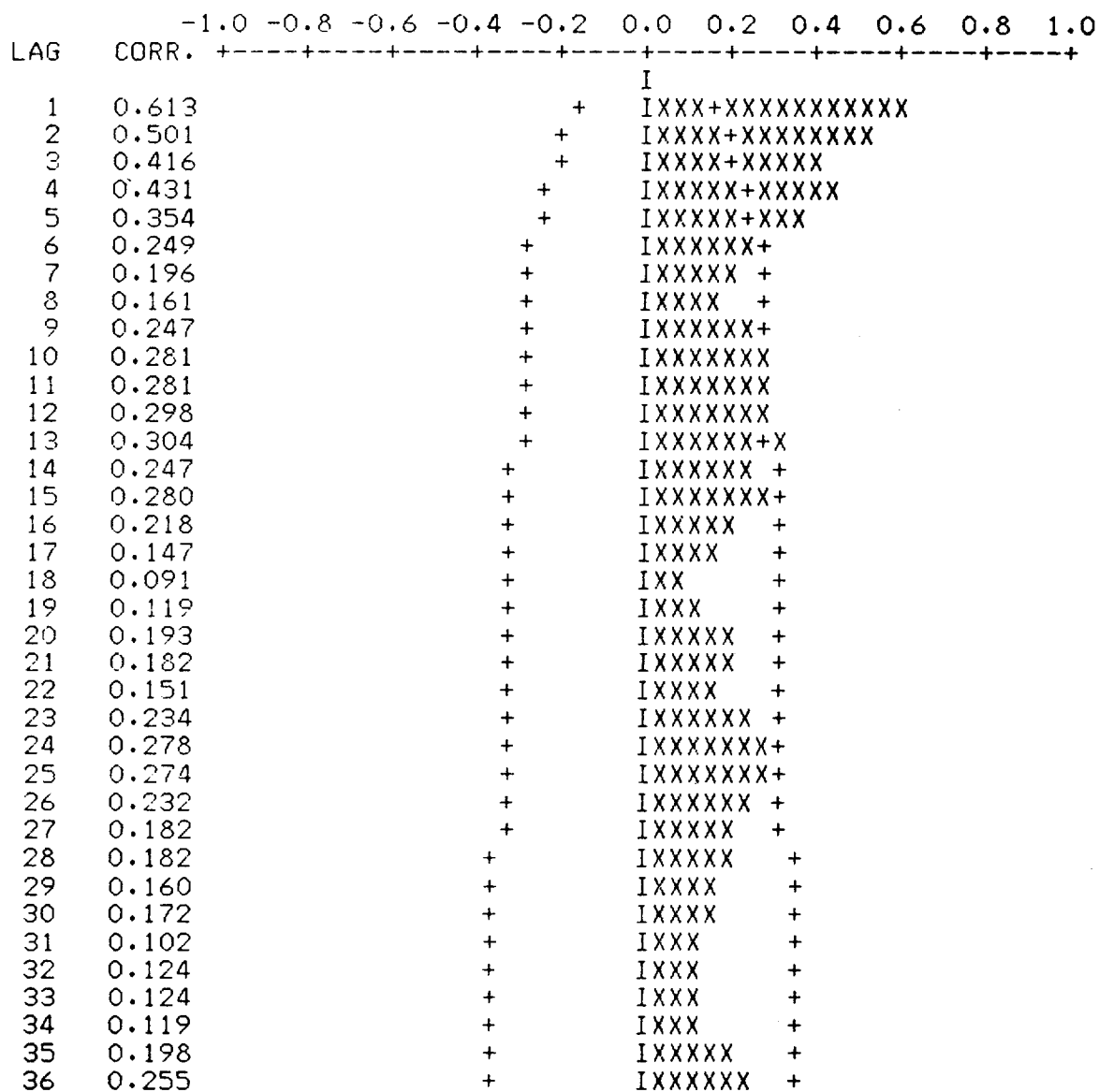


GRAFICO 5
f.a.s. Serie Δ^2 Log. IPMNA

AUTOCORRELATIONS

1- 12	-.36	-.04	-.13	.12	.04	-.07	-.02	-.16	.07	.04	-.02	.01
ST.E.	.07	.08	.08	.08	.09	.09	.09	.09	.09	.09	.09	.09
13- 24	.08	-.12	.12	.01	-.02	-.11	-.06	.11	.02	-.15	.05	.06
ST.E.	.09	.09	.09	.09	.09	.09	.09	.09	.09	.09	.09	.09
25- 36	.05	.01	-.07	.03	-.04	.11	-.12	.03	0.0	-.11	.03	.15
ST.E.	.09	.09	.09	.09	.09	.09	.09	.10	.10	.10	.10	.10

PLOT OF AUTOCORRELATIONS

LAG	CORR.	-1.0	-0.8	-0.6	-0.4	-0.2	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	
		+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+											
							I						
1	-0.356						XXXXX+XXXI	+					
2	-0.036						+ XI	+					
3	-0.128						+XXXI	+					
4	0.118						+ IXXX+						
5	0.036						+ IX	+					
6	-0.068						+ XXI	+					
7	-0.022						+ XI	+					
8	-0.156						XXXXI	+					
9	0.066						+ IXX	+					
10	0.044						+ IX	+					
11	-0.020						+ XI	+					
12	0.013						+ I	+					
13	0.081						+ IXX	+					
14	-0.115						+XXXI	+					
15	0.121						+ IXXX+						
16	0.013						+ I	+					
17	-0.019						+ I	+					
18	-0.111						+XXXI	+					
19	-0.058						+ XI	+					
20	0.110						+ IXXX+						
21	0.024						+ IX	+					
22	-0.148						XXXXI	+					
23	0.051						+ IX	+					
24	0.062						+ IXX	+					
25	0.049						+ IX	+					
26	0.011						+ I	+					
27	-0.066						+ XXI	+					
28	0.030						+ IX	+					
29	-0.044						+ XI	+					
30	0.106						+ IXXX	+					
31	-0.119						+ XXXI	+					
32	0.030						+ IX	+					
33	0.004						+ I	+					
34	-0.108						+ XXXI	+					
35	0.029						+ IX	+					
36	0.152						+ IXXXX+						

GRAFICO 6

f.a.s. Serie $\Delta^2\Delta_{12}$ Log. IPMNA

AUTOCORRELATIONS

1- 12	-.38	-.01	-.19	.19	.06	.02	-.01	-.28	.08	.17	.12	-.47
ST.E.	.08	.09	.09	.09	.09	.09	.09	.09	.10	.10	.10	.10
13- 24	.18	-.07	.15	-.01	-.05	-.08	.01	.16	-.01	-.12	.07	-.07
ST.E.	.11	.11	.11	.12	.12	.12	.12	.12	.12	.12	.12	.12
25- 36	.09	.04	-.02	-.10	.01	.08	-.06	.02	-.03	-.04	-.03	.09
ST.E.	.12	.12	.12	.12	.12	.12	.12	.12	.12	.12	.12	.12

PLOT OF AUTOCORRELATIONS

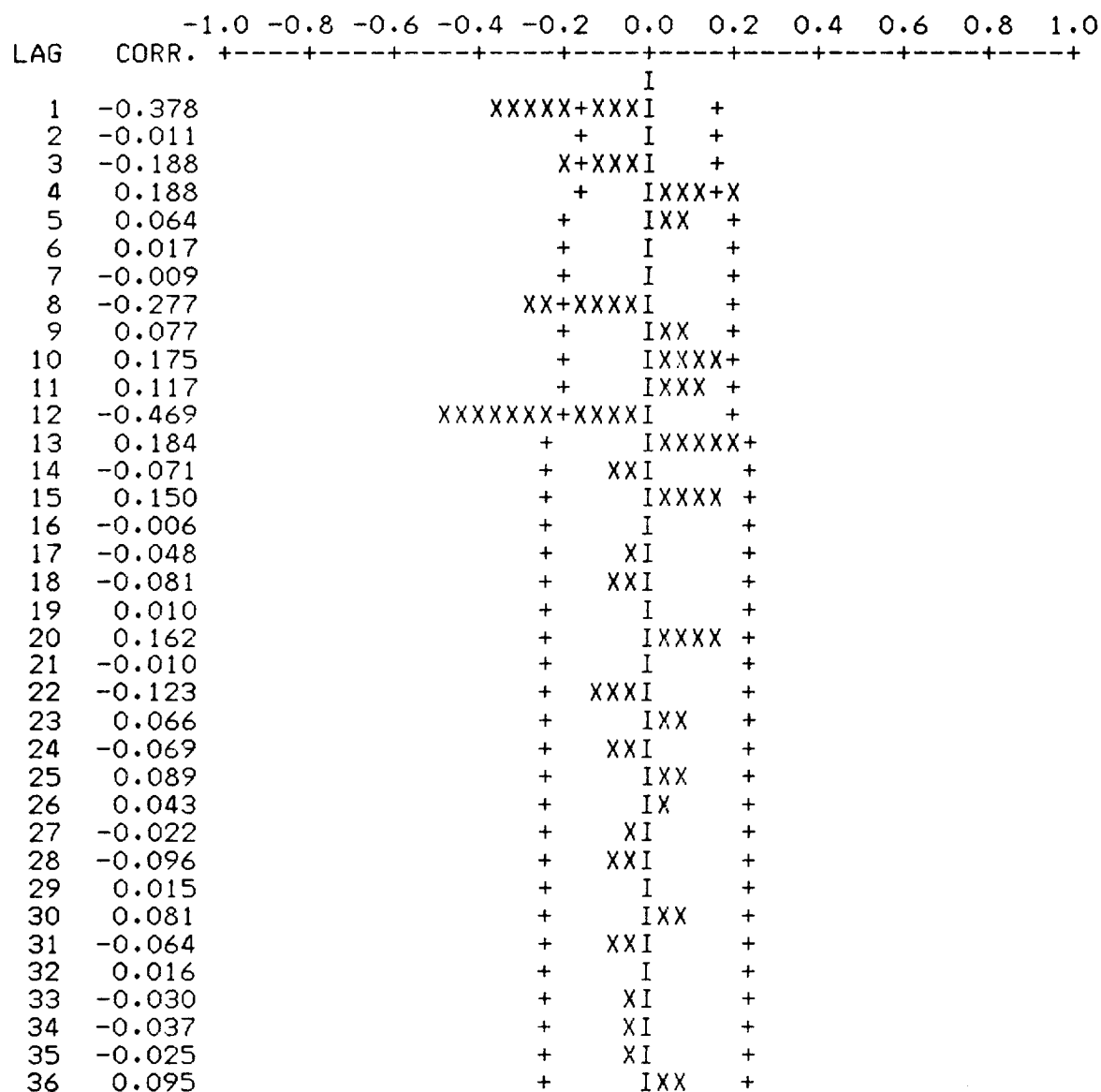


GRAFICO 8

f.a.s. Serie $\Delta\Delta_{12}$ Log. IPMNA

AUTOCORRELATIONS

1- 12	.43	.30	.20	.31	.21	.06	-.08	-.23	-.09	-.07	-.19	-.49
ST.E.	.08	.09	.10	.10	.10	.11	.11	.11	.11	.11	.11	.11
13- 24	-.21	-.16	-.05	-.14	-.17	-.16	-.06	.04	-.02	-.08	-.01	.02
ST.E.	.12	.13	.13	.13	.13	.13	.13	.13	.13	.13	.13	.13
25- 36	.06	.03	-.04	-.05	.01	.05	-.01	-.02	-.02	.01	.03	.09
ST.E.	.13	.13	.13	.13	.13	.13	.13	.13	.13	.13	.13	.13

PLOT OF AUTOCORRELATIONS

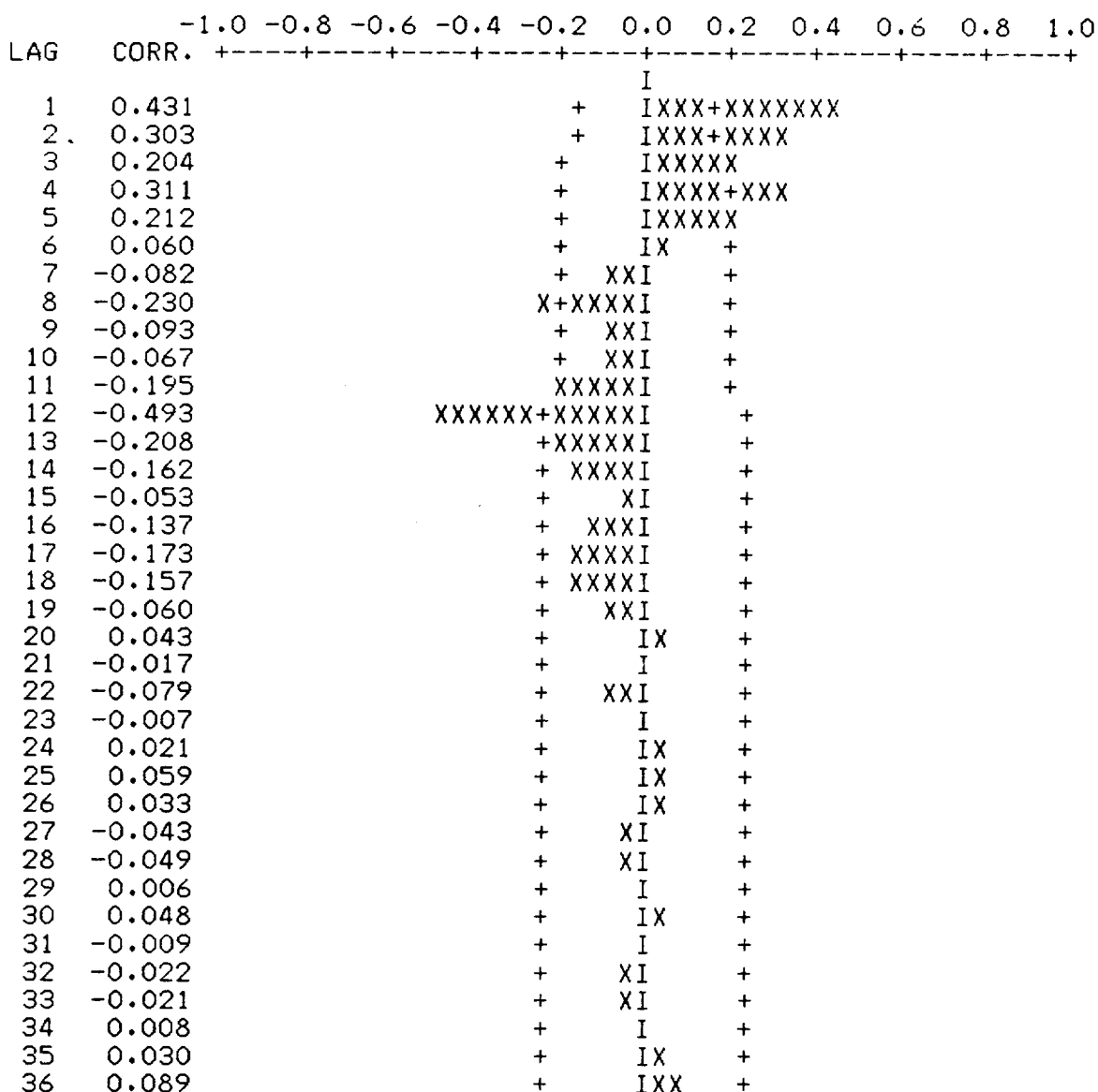


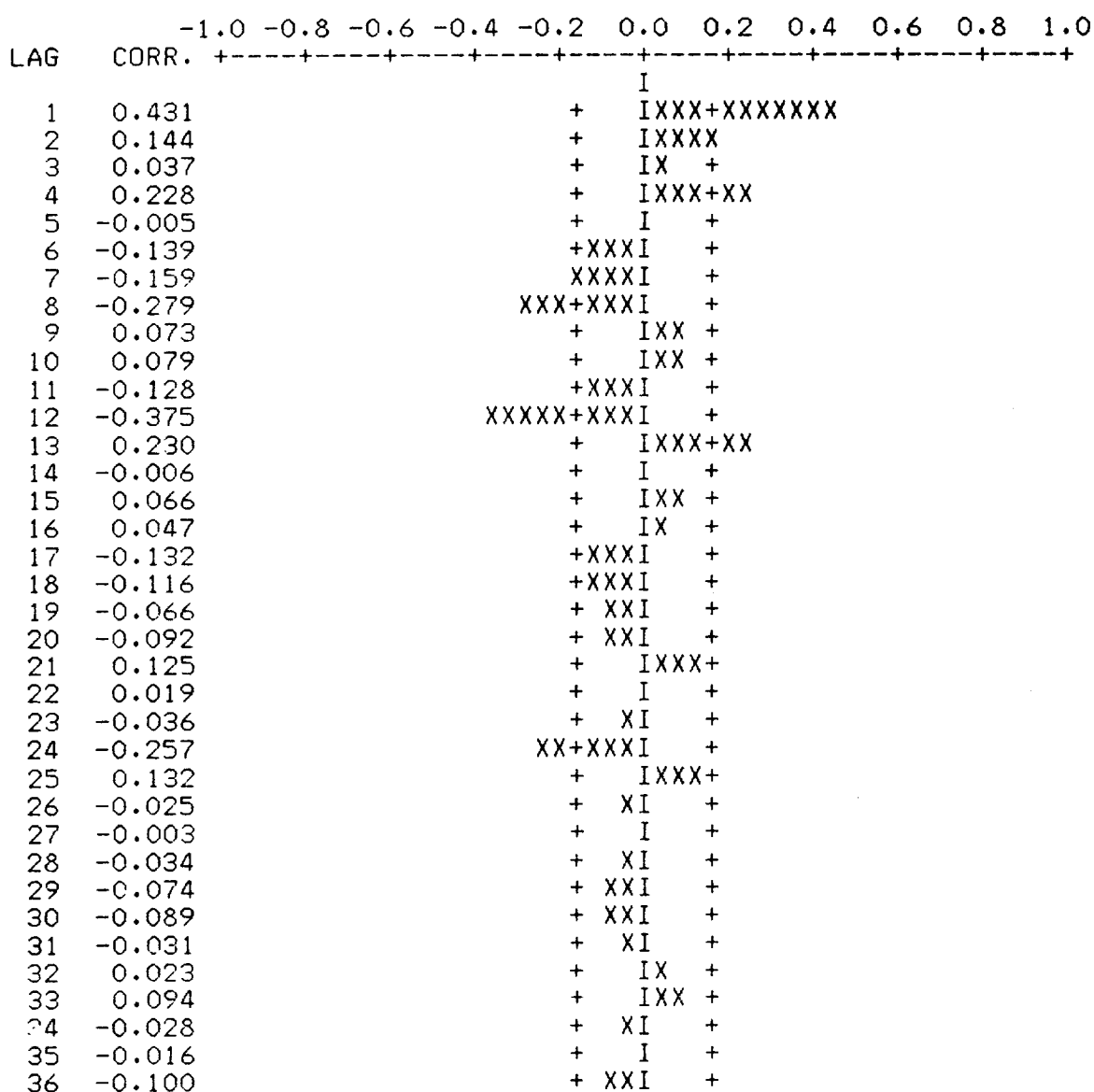
GRAFICO 9

f.a.p. Serie $\Delta\Delta_{12}$ Log. IPMNA

PARTIAL AUTOCORRELATIONS

1- 12	.43	.14	.04	.23	-.01	-.14	-.16	-.28	.07	.08	-.13	-.37
ST.E.	.08	.08	.08	.08	.08	.08	.08	.08	.08	.08	.08	.08
13- 24	.23	-.01	.07	.05	-.13	-.12	-.07	-.09	.13	.02	-.04	-.26
ST.E.	.08	.08	.08	.08	.08	.08	.08	.08	.08	.08	.08	.08
25- 36	.13	-.03	0.0	-.03	-.07	-.09	-.03	.02	.09	-.03	-.02	-.10
ST.E.	.08	.08	.08	.08	.08	.08	.08	.08	.08	.08	.08	.08

PLOT OF PARTIAL AUTOCORRELATIONS



En ambos casos, el gráfico de residuos (gráfico 10) presenta valores extremos correspondientes a las observaciones en las que se ha detectado la presencia de intervención.

El correlograma de los residuos del modelo 1 (gráfico 11) presenta una correlación significativa en el retardo 8, siendo por lo demás aceptable. El correlograma de los residuos del modelo 2 (gráfico 12) presenta, por su parte, correlaciones casi significativas en los retardos 1 y 2, por lo que no parece recoger completamente la estructura de autocorrelación del modelo.

Centrándonos, por lo tanto, en el modelo 1, se ha llevado a cabo un análisis de intervención definiendo las siguientes variables ficticias

$$\xi_{1t} = \begin{cases} 0 & t < 135 \\ 1 & t \geq 135 \end{cases}$$

$$\xi_{2t} = \begin{cases} 0 & t < 138 \\ 1 & t \geq 138 \end{cases}$$

$$\xi_{3t} = \begin{cases} 0 & t < 156 \\ 1 & t \geq 156 \end{cases}$$

que se corresponden con las intervenciones que antes se han señalado como de posible incidencia.

El modelo propuesto es por lo tanto

$$\log IPMNA_t = \omega_{10}\xi_{1t} + (\omega_{20} + \omega_{21}B)\xi_{2t} + \omega_{30}\xi_{3t} + \frac{(1 - \theta_1 B)(1 - \theta_{12}B^{12})}{(1 - B)(1 - B^{12})}a_t$$

La razón de que la segunda intervención se introduzca con dos coeficientes reside en la observación de que los residuos, tanto correspondientes a la observación 138 como a la 139 son negativos y muy alejados de la media. El modelo estimado (tabla 1) resulta ser

$$\log IPMNA_t = 0,0245 \xi_{1t} - (0,0129 + 0,0181 B) \xi_{2t} + 0,0126 \xi_{3t} + \frac{(1 - 0,545 B)(1 - 0,844 B^{12})}{(1 - B)(1 - B^{12})}a_t$$

Todos los parámetros estimados son significativos y tienen los signos esperados. En efecto, los incrementos de precios en petróleo y sus derivados provocan incrementos en la variable que se estudia, mientras que el efecto de la política de precios es un descenso en el nivel de los mismos, aunque no muy acusado.

Los residuos del modelo presentan un correlograma (gráfico 13) más limpio que el del modelo sin intervención, aunque sigue existiendo una correlación significativa de retardo 8. La varianza residual se reduce en un 27 % debido a la introducción de las intervenciones.

GRAFICO 10

Residuos

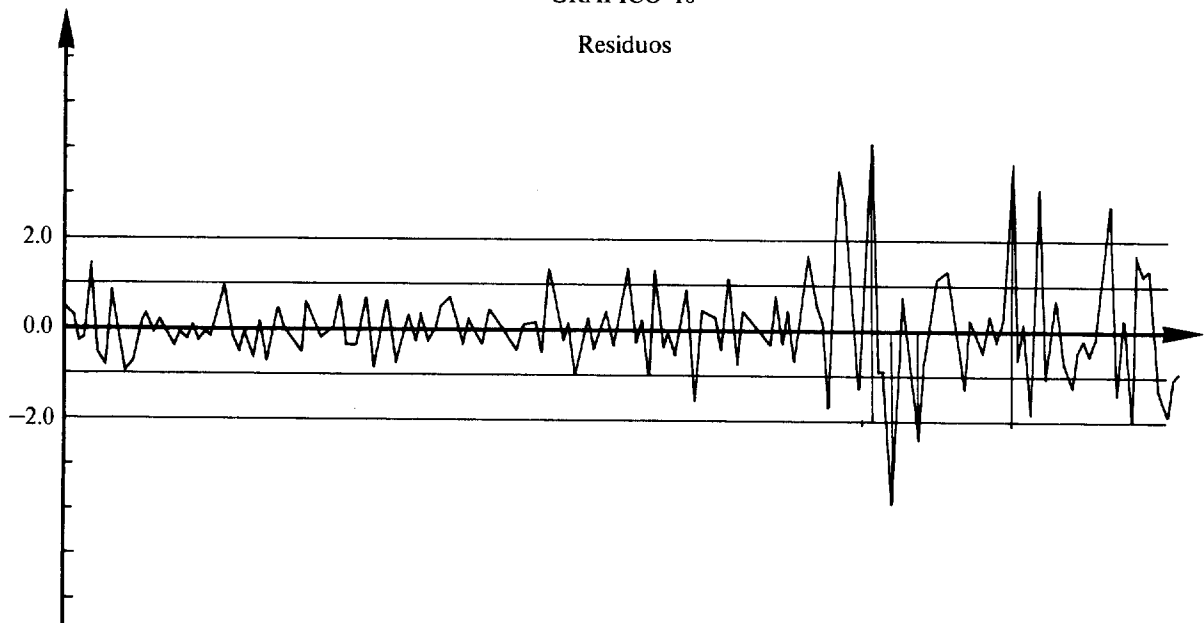


GRAFICO 11
f.a.s. residuos modelo 1

AUTOCORRELATIONS

1- 12	.05	-.03	-.10	.08	.07	-.11	-.14	-.27	-.01	.06	-.01	-.11
ST.E.	.08	.08	.08	.08	.08	.08	.08	.08	.09	.09	.09	.09
13- 24	.05	-.03	.15	.04	-.05	-.16	-.05	.08	.02	-.11	.01	.03
ST.E.	.09	.09	.09	.09	.09	.09	.09	.09	.09	.09	.09	.09
25- 36	.10	.02	-.05	-.01	.01	.07	-.06	-.03	-.05	-.10	.03	.10
ST.E.	.09	.09	.09	.09	.09	.09	.09	.09	.09	.09	.09	.09

PLOT OF AUTOCORRELATIONS

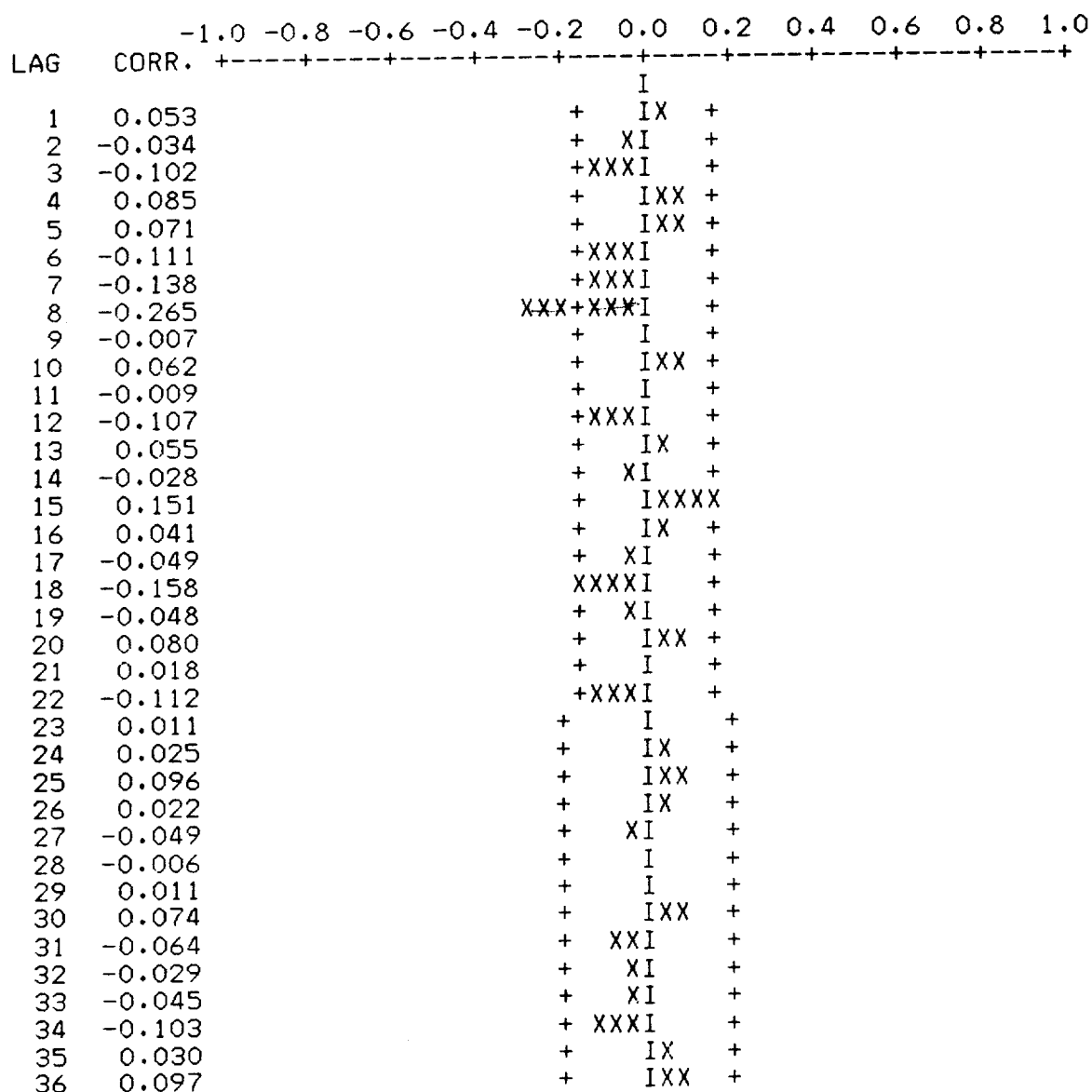


GRAFICO 12

f.a.s. residuos modelo 2

AUTOCORRELATIONS

1- 12	-.14	.11	-.01	.17	.14	-.02	.03	-.16	.09	.10	.03	-.10
ST.E.	.08	.08	.08	.08	.08	.08	.08	.08	.08	.09	.09	.09
13- 24	.12	-.07	.16	.02	.01	-.09	0.0	.09	.04	-.09	.05	-.01
ST.E.	.09	.09	.09	.09	.09	.09	.09	.09	.09	.09	.09	.09
25- 36	.10	.02	-.03	.02	.01	.11	-.05	.03	.02	-.06	.05	.10
ST.E.	.09	.09	.09	.09	.09	.09	.09	.09	.09	.09	.09	.09

PLOT OF AUTOCORRELATIONS

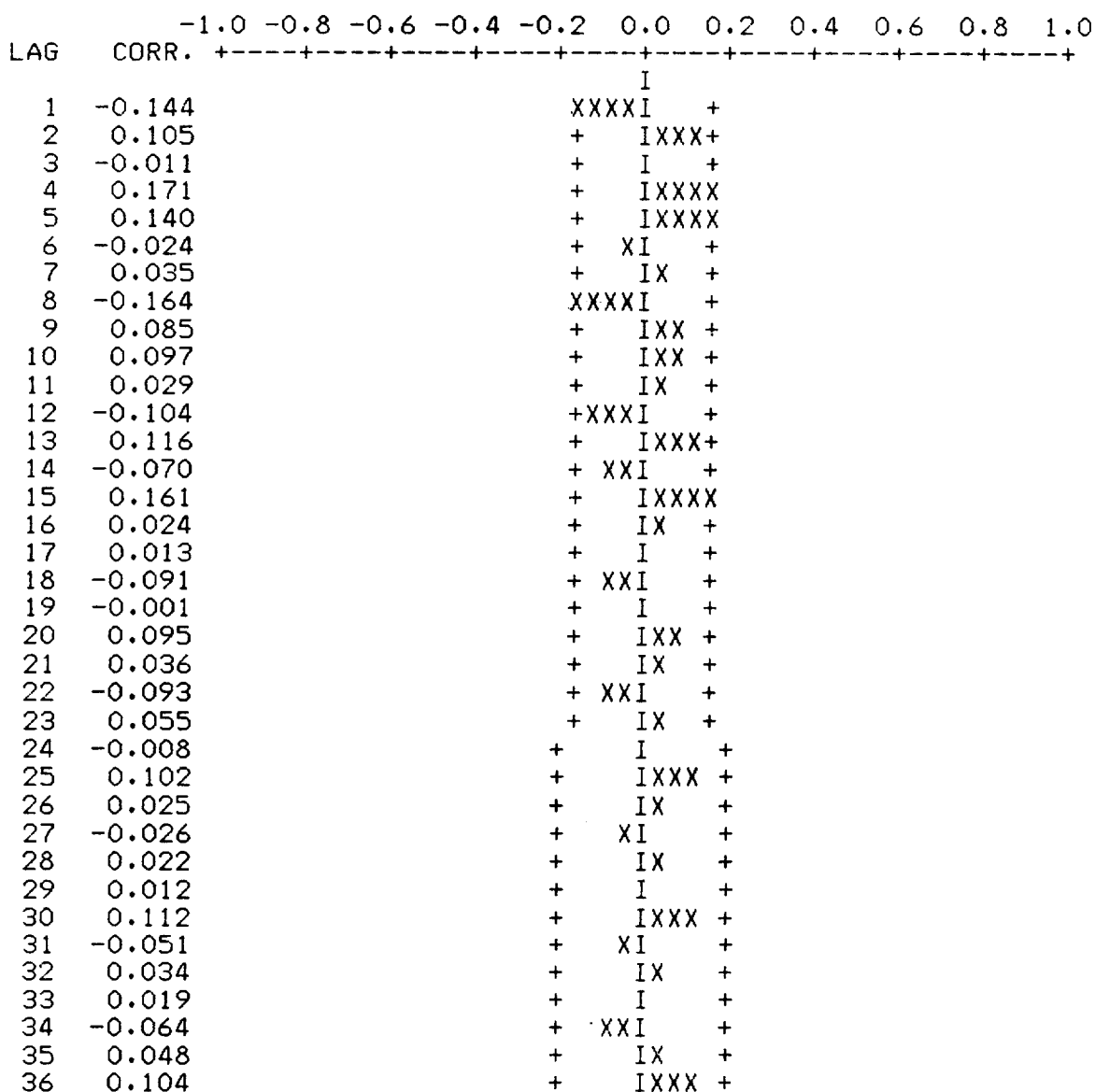


TABLA 1

SUMMARY OF THE MODEL

OUTPUT VARIABLE -- lipmna1

INPUT VARIABLES -- NOISE inter11 inter21 inter31

VARIABLE	VAR. TYPE	MEAN	TIME	DIFFERENCES	
				1	12
lipmna1	RANDOM		2- 183	(1-B)	(1-B)
inter11	BINARY		2- 183	(1-B)	(1-B)
inter21	BINARY		2- 183	(1-B)	(1-B)
inter31	BINARY		2- 183	(1-B)	(1-B)

PARAMETER	VARIABLE	TYPE	FACTOR	ORDER	ESTIMATE	ST. ERR.	T-RATIO
1	lipmna1	MA	1	1	0.5455	0.0667	8.18
2	lipmna1	MA	2	12	0.8448	0.0324	26.07
3	inter11	UP	1	0	0.2459E-01	0.0051	4.86
4	inter21	UP	1	0	-0.1295E-01	0.0053	-2.46
5	inter21	UP	1	1	-0.1816E-01	0.0052	-3.48
6	inter31	UP	1	0	0.2160E-01	0.0051	4.25

RESIDUAL SUM OF SQUARES = 0.005644

DEGREES OF FREEDOM = 163

RESIDUAL MEAN SQUARE = 0.000035

(BACKCASTS EXCLUDED)

GRAFICO 13

f.a.s. residuos modelo 1 con intervención

AUTOCORRELATIONS

1- 12	.04	-.01	-.08	.01	-.02	-.08	-.02	-.16	.04	-.04	0.0	-.17
ST.E.	.08	.08	.08	.08	.08	.08	.08	.08	.08	.08	.08	.08
13- 24	.14	-.05	.08	.05	.02	-.10	-.13	.06	-.16	-.06	.06	.13
ST.E.	.08	.08	.08	.08	.08	.08	.09	.09	.09	.09	.09	.09
25- 36	-.01	-.01	-.02	-.05	0.0	.08	-.03	.03	.02	-.10	-.05	.01
ST.E.	.09	.09	.09	.09	.09	.09	.09	.09	.09	.09	.09	.09

PLOT OF AUTOCORRELATIONS

LAG	CORR.	-1.0	-0.8	-0.6	-0.4	-0.2	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
		+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+										
1	0.045						I					
2	-0.013						+ IX +					
3	-0.083						+ I +					
4	0.007						+ XXI +					
5	-0.024						+ I +					
6	-0.075						+ XI +					
7	-0.020						+ XXI +					
8	-0.159						+ XI +					
9	0.035						XXXXI +					
10	-0.038						+ IX +					
11	0.004						+ XI +					
12	-0.174						+ I +					
13	0.144						XXXXI +					
14	-0.050						+ IXXXX +					
15	0.076						+ XI +					
16	0.051						+ IXX +					
17	0.023						+ IX +					
18	-0.096						+ IX +					
19	-0.133						+ XXI +					
20	0.061						+ XXXI +					
21	-0.157						+ IXX +					
22	-0.060						XXXXI +					
23	0.055						+ XI +					
24	0.133						+ IX +					
25	-0.013						+ IXXX+					
26	-0.007						+ I +					
27	-0.019						+ I +					
28	-0.054						+ I +					
29	-0.000						+ XI +					
30	0.075						+ I +					
31	-0.029						+ IXX +					
32	0.031						+ XI +					
33	0.021						+ IX +					
34	-0.100						+ IX +					
35	-0.049						+ XXI +					
36	0.012						+ XI +					
							+ I +					

7. MODELOS DINAMICOS ENTRE VARIABLES

En el caso general, las variables que sirven de input en el modelo son variables aleatorias, sobre cuyo mecanismo de determinación el modelo no dice nada.

Limitándonos a un input (Y_t) y un output (X_t) el modelo, tal como se ha expuesto, es:

$$X_t = \frac{\omega(B)}{\delta(B)} Y_t + \frac{\theta(B)}{\phi(B)} a_t$$

Para construir un modelo de esta clase es preciso identificar el orden de los polinomios ω , δ , θ y ϕ . El filtro $\frac{\omega(B)}{\delta(B)}$ recoge la influencia sistemática de Y_t sobre X_t , mientras que el filtro $\frac{\theta(B)}{\phi(B)}$ recoge todo el resto de estructura de relación temporal de la variable X_t .

Respecto de este último, sabemos ya cómo podemos obtener información que nos ayude a identificarlo. ¿Cómo podemos obtener información que nos ayude a identificar el filtro entre Y_t y X_t ?

Dicho filtro recoge la estructura de correlación entre ambas variables. Por lo tanto, pensar en la función de correlación cruzada entre ellas es inmediato.

Definamos:

$$c_{XY}(k) = \begin{cases} \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{T-k} (X_i - \bar{X})(Y_{i+k} - \bar{Y}) & k > 0 \\ \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{T+k} (Y_i - \bar{Y})(X_{i-k} - \bar{X}) & k < 0 \end{cases}$$

$c_{XY}(k)$ es una función que representa la relación dinámica entre X e Y y se llama función de covarianza cruzada. Un punto a notar es que $c_{XY}(k)$ no tiene por qué ser igual, ahora a $c_{YX}(k)$: no tiene por qué haber simetría en el comportamiento temporal entre ambas variables.

Aunque $c_{XY}(k)$ parece un instrumento obvio para identificar la relación entre ambas variables, tiene el problema de que si las series X_t e Y_t están muy correlacionadas consigo mismas, la información que la correlación cruzada ofrece puede no ser útil.

El procedimiento, entonces, pasa por blanquear una o las dos series: esto es, convertirlas en ruido blanco.

El procedimiento supone que, después de eliminar toda la autocorrelación de las series, la estructura de relación entre ellas se mantiene. Es decir, si X_t e Y_t están dinámicamente relacionadas, $\hat{a}_{X_t}$ y $\hat{a}_{Y_t}$ (residuos de sus respectivos modelos) lo estarán también.

Por lo tanto, uno de los procedimientos propone buscar los modelos ARMA adecuados a las series X_t e Y_t , obtener los residuos, y buscar la relación entre ambas series a través de su función de correlación cruzada:

$$\hat{a}_{X_t} = \hat{\theta}_X(B)^{-1} \hat{\phi}_X(B) X_t$$

$$\hat{a}_{Y_t} = \hat{\theta}_Y(B)^{-1} \hat{\phi}_Y(B) Y_t$$

$c_{\hat{a}_X \hat{a}_Y}(k)$ nos dará una idea del polinomio que une a ambas series. Supongamos que:

$$\hat{a}_{X_t} = \frac{b(B)}{a(B)} \hat{a}_{Y_t}$$

Sustituyendo $\hat{a}_{x_t}$ y $\hat{a}_{y_t}$ por sus modelos respectivos, obtendremos el modelo global de relación entre X e Y. Estimado este modelo completo, y estudiando sus residuos, deduciremos la estructura de retardos para los residuos. Reestimando todo el modelo, obtendremos el modelo de función de transferencia.

El otro procedimiento, propuesto por Box y Jenkins, consiste en blanquear la serie de input con el modelo adecuado, y usar este mismo modelo para transformar el output:

$$\hat{a}_{y_t} = \hat{\theta}_Y(B)^{-1} \hat{\phi}_Y(B) Y_t$$

$$\hat{\beta}_{x_t} = \hat{\theta}_Y(B)^{-1} \hat{\phi}_Y(B) X_t$$

La serie $\hat{\beta}_{x_t}$ no será, claramente, un ruido blanco. Sin embargo, puede demostrarse que las correlaciones entre $\hat{a}_y$ y $\hat{\beta}_x$ son proporcionales a las ponderaciones de la función que relaciona ambas series. Es decir, si

$$\hat{\beta}_{x_t} = v(B) \hat{a}_{y_t} + \varepsilon_t$$

siendo $v(B) = v_0 + v_1 B + v_2 B^2 + \dots$ se tiene que:

$$v_k = \frac{\rho_{\hat{\beta}\hat{a}}(k) \sigma_{\hat{a}}}{\sigma_{\hat{\beta}}}$$

donde $\rho_{xy}(k) = \text{corr}(X_t, Y_{t+k})$.

La función de correlación cruzada, por lo tanto, permite obtener la forma de la función $v(B)$. Parametrizarla en forma de un polinomio racional:

$$v(B) = \frac{\omega(B)}{\delta(B)}$$

dependerá de la forma que las ponderaciones v_k muestren. Obtenida la identificación de $\omega(B)$ y $\delta(B)$, estimar la relación entre X_t e Y_t y estudiar el comportamiento de sus residuos permitirá, de nuevo, obtener la forma del filtro para el ruido y recomponer el modelo completo.

8. ILUSTRACION DE FUNCION DE TRANSFERENCIA

Con objeto de ilustrar el proceso de construcción de una función de transferencia trataremos de buscar la relación existente entre dos variables que se suponen muy relacionadas entre sí. Dichas variables son el Índice de Producción Industrial y el Consumo de Energía Eléctrica (CEE). La primera variable (IPI) ya ha sido modelizada en un ejercicio anterior.

La hipótesis sobre la que se construye la función de transferencia es la de que CEE es capaz de explicar parte de la determinación de IPI. Esto es, CEE es el input de la función de transferencia, siendo IPI el output de la misma.

Esta hipótesis previa puede, desde luego, contrastarse con anterioridad a la construcción del modelo. En cualquier caso, es preciso previamente construir el modelo univariante correspondiente a la serie CEE.

8.1. Modelo univariante para CEE

Los gráficos 1 y 2 muestran la serie original y su transformación logarítmica. Aunque la serie original no muestra un cambio excesivo en su dispersión, la serie logarítmica parece más homogénea en este sentido, por lo que se elegirá la serie en logaritmos (sobre todo teniendo en cuenta que el output de la función de transferencia, IPI, se ha modelizado en logaritmos).

La no estacionariedad de la serie exige tomar una diferencia de la misma. La serie $\Delta \log CEE$

presenta una f.a.s. y f.a.p. (gráficos 3 y 4) que parecen corresponder a un modelo MA (1), observándose cierta evidencia de estacionalidad.

Ajustado un modelo MA (1) a la serie, la presencia de estacionalidad vuelve a sugerirse en los residuos. Por esta razón, se toma una diferencia de orden 12, con objeto de poner de manifiesto la posible estacionalidad existente. Los gráficos 5, 6 y 7 describen la serie $\Delta_{12} \log CEE$. Se observa en ellos una estructura clara —correspondiente a un modelo MA (1) $\times$ MA (1)₁₂. Evidentemente, la estructura ha podido ser inducida por el proceso de diferenciación seguido. Por lo tanto, habrá que estar atentos a la posible existencia de raíces unitarias en los polinomios MA.

Estimado el modelo propuesto (tabla 1) se obtiene:

$$\Delta_{12} \log CEE = (1 - 0,572 B) (1 - 0,901 B^{12}) a_t$$

(0,054) (0,018)

Se observa que el coeficiente estacional es muy cercano a la unidad, pudiendo indicar que no es necesaria la diferencia 12 (o, lo que es lo mismo, que la estructura estacional ha sido inducida por una diferencia excesiva). No obstante, el intervalo de confianza al 95 % para el coeficiente estimado no incluye la unidad, por lo que, a efectos de ilustrar la construcción de una función de transferencia, aceptaremos que el modelo es correcto, ya que los residuos del mismo (gráfico 8) no presentan ninguna evidencia de autocorrelación.

GRAFICO 1

Serie CEE

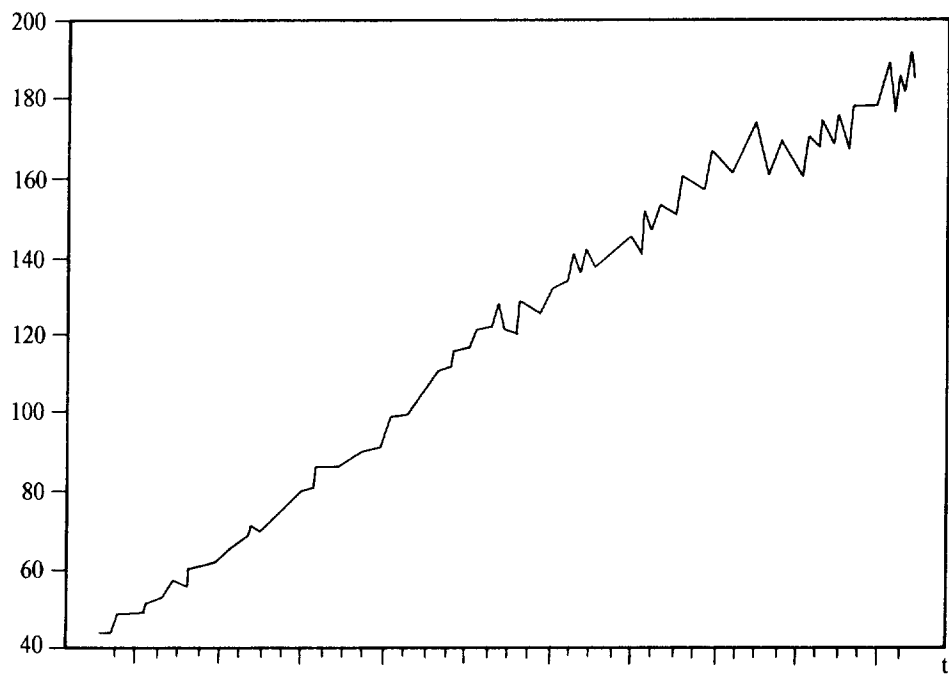


GRAFICO 2

Serie Log. CEE

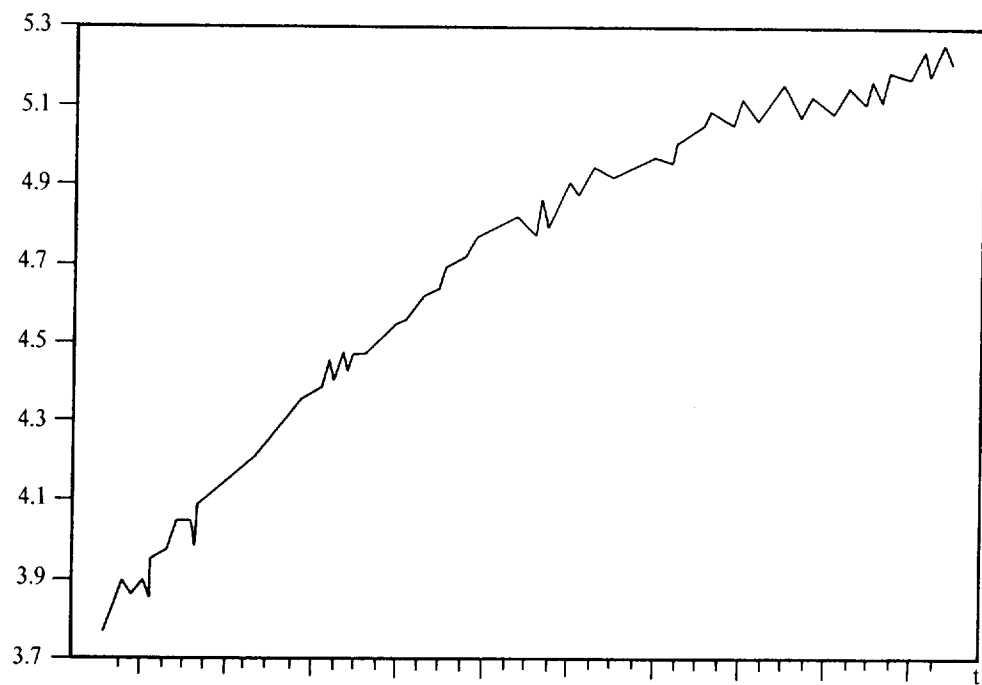


GRAFICO 3

f.a.s. Serie Δ Log. CEE

AUTOCORRELATIONS

1- 12	-.48	.04	.07	-.14	.12	.05	-.13	.14	.06	-.12	.14	-.14
ST.E.	.07	.08	.08	.08	.08	.08	.08	.08	.08	.08	.08	.09
13- 24	.10	0.0	.06	-.09	.03	.01	.03	.01	.06	-.08	.10	-.06
ST.E.	.09	.09	.09	.09	.09	.09	.09	.09	.09	.09	.09	.09
25- 36	-.05	.11	-.11	.11	-.04	.05	-.06	.13	-.09	.03	.02	-.05
ST.E.	.09	.09	.09	.09	.09	.09	.09	.09	.09	.09	.09	.09

PLOT OF AUTOCORRELATIONS

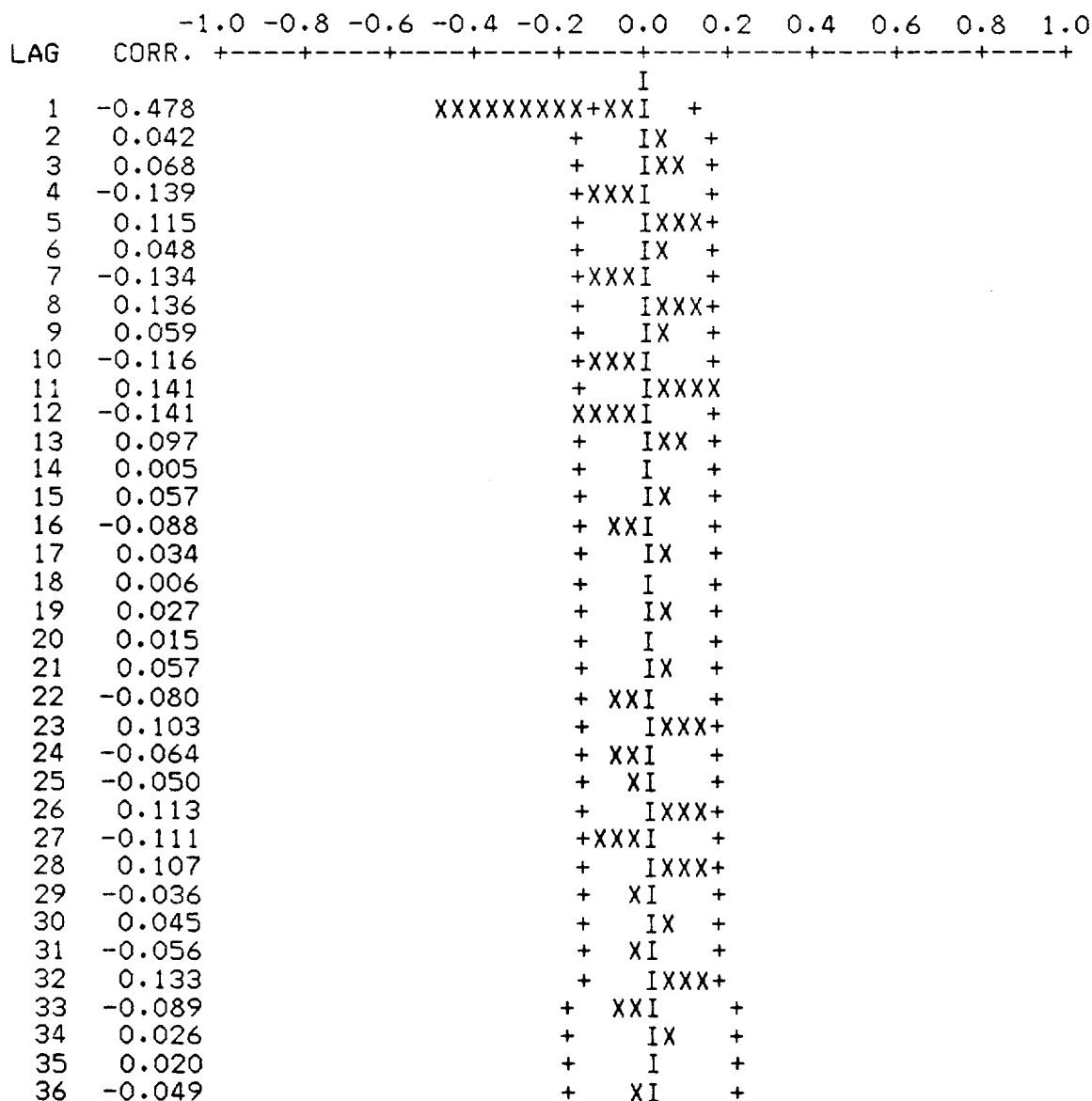


GRAFICO 4

f.a.p. Serie Δ Log. CEE

PARTIAL AUTOCORRELATIONS

1- 12	-.48	-.24	-.03	-.14	-.01	.12	-.04	.06	.21	.07	.13	-.01
ST.E.	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07
13- 24	.07	.02	.15	-.01	-.05	-.02	.02	.02	.14	.01	.09	0.0
ST.E.	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07
25- 36	-.05	0.0	-.07	-.01	-.07	.06	-.03	.13	.11	.02	.05	-.01
ST.E.	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07

PLOT OF PARTIAL AUTOCORRELATIONS

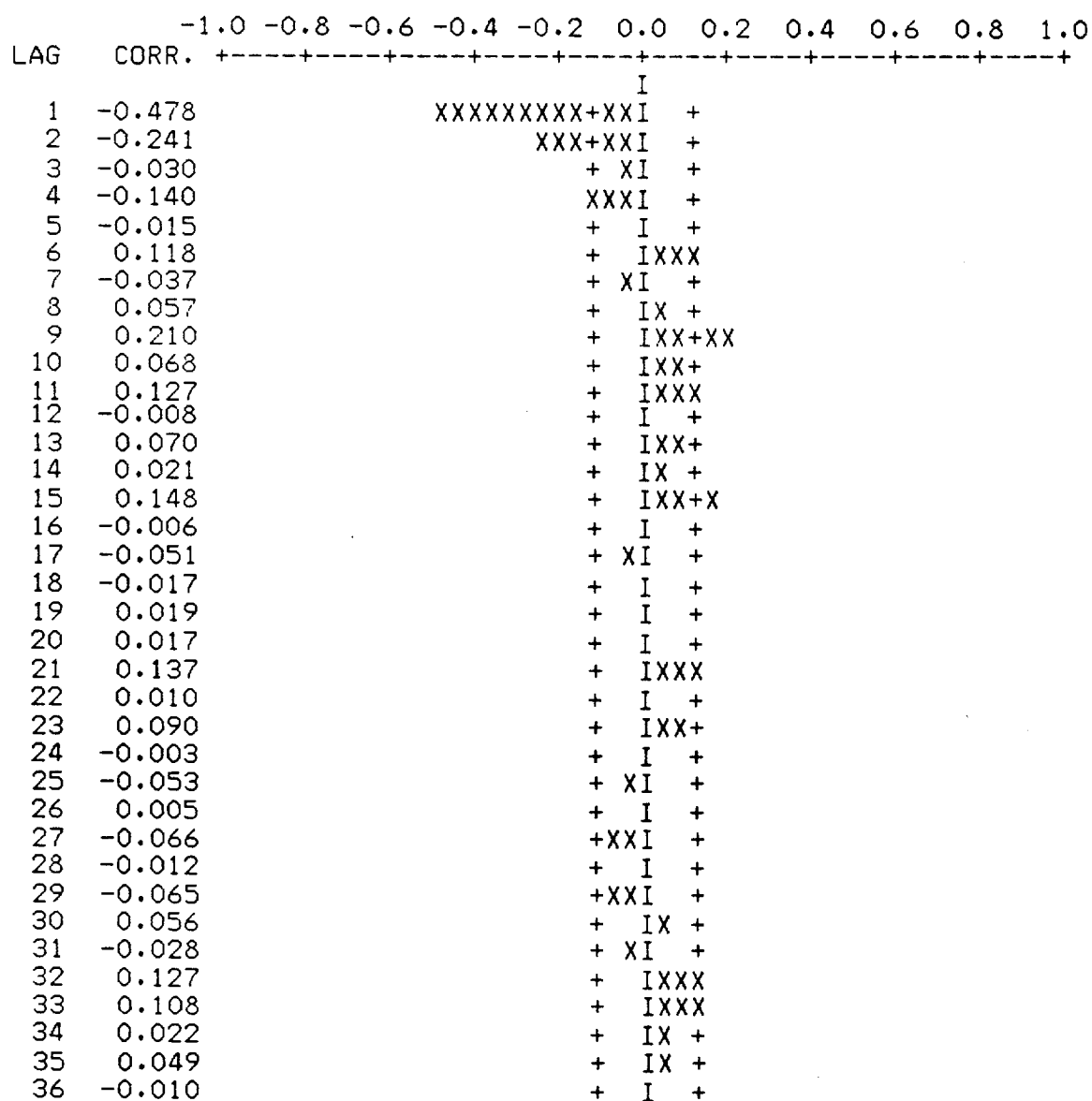


GRAFICO 5

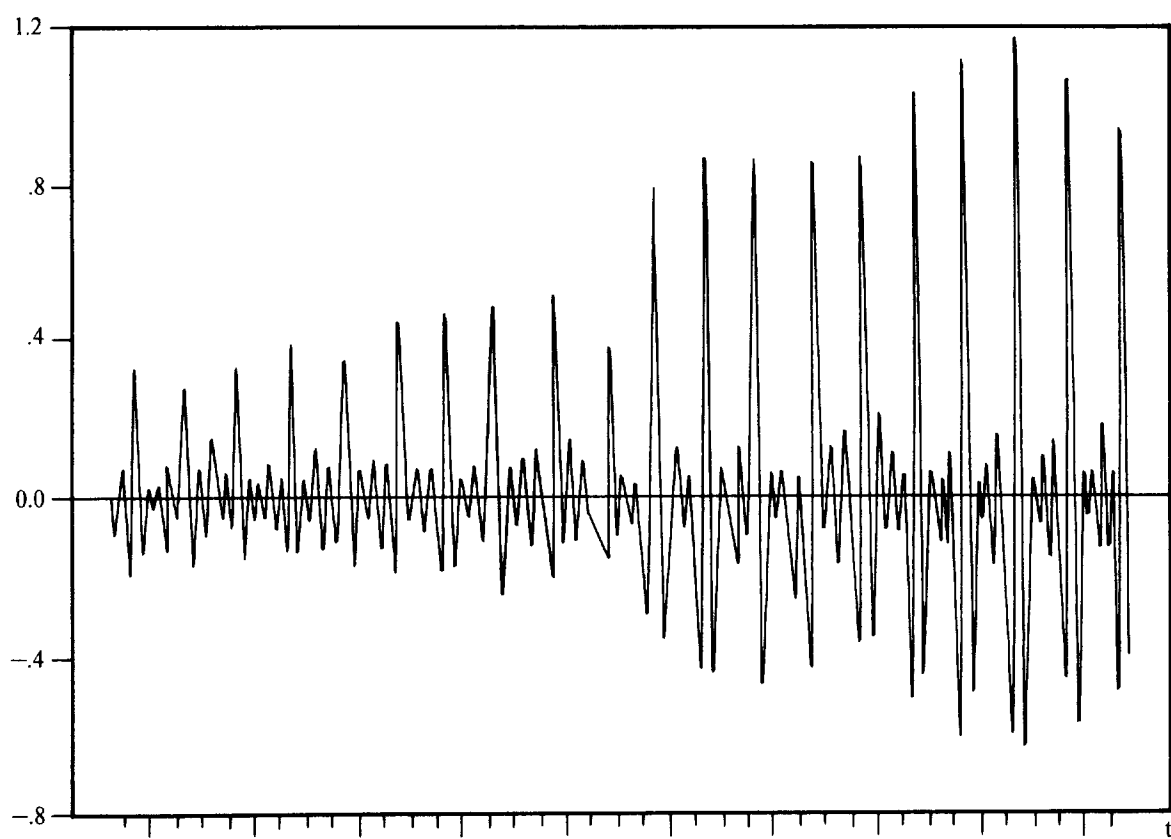
Serie $\Delta\Delta_{12}$ Log. CEE

GRAFICO 6

f.a.s. Serie $\Delta\Delta_{12}$ Log. CEE

AUTOCORRELATIONS

1- 12	-.52	.09	-.01	-.13	.13	.02	-.15	.13	.02	-.08	.27	-.47
ST.E.	.07	.08	.08	.08	.09	.09	.09	.09	.09	.09	.09	.09
13- 24	.25	-.03	.07	-.09	.04	-.07	.11	-.09	.06	-.03	.02	.01
ST.E.	.10	.11	.11	.11	.11	.11	.11	.11	.11	.11	.11	.11
25- 36	-.08	.07	-.11	.13	-.09	.08	-.09	.09	-.08	.05	-.07	.09
ST.E.	.11	.11	.11	.11	.11	.11	.11	.11	.11	.11	.11	.11

PLOT OF AUTOCORRELATIONS

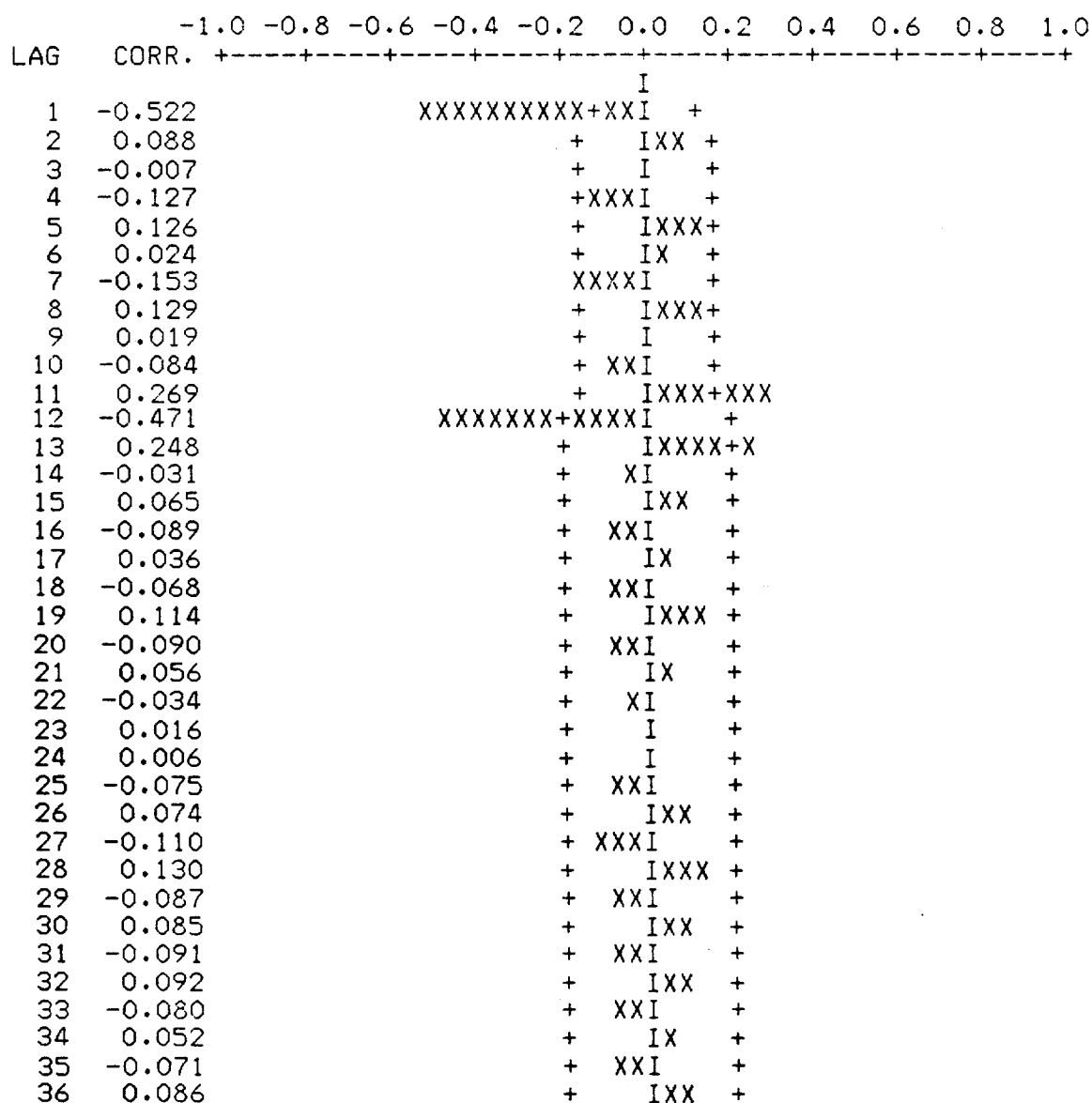


GRAFICO 7

f.a.p. Serie $\Delta\Delta_{12}$ Log. CEE

PARTIAL. AUTOCORRELATIONS

1- 12	-.52	-.25	-.12	-.25	-.11	.05	-.15	-.07	.10	0.0	.31	-.22
ST.E.	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07
13- 24	-.15	-.08	.12	-.15	-.08	-.05	-.04	-.11	.09	-.01	.18	-.14
ST.E.	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07
25- 36	-.16	-.07	-.02	-.13	-.14	-.01	-.04	-.05	.06	.02	.04	-.01
ST.E.	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07

PLOT OF PARTIAL AUTOCORRELATIONS

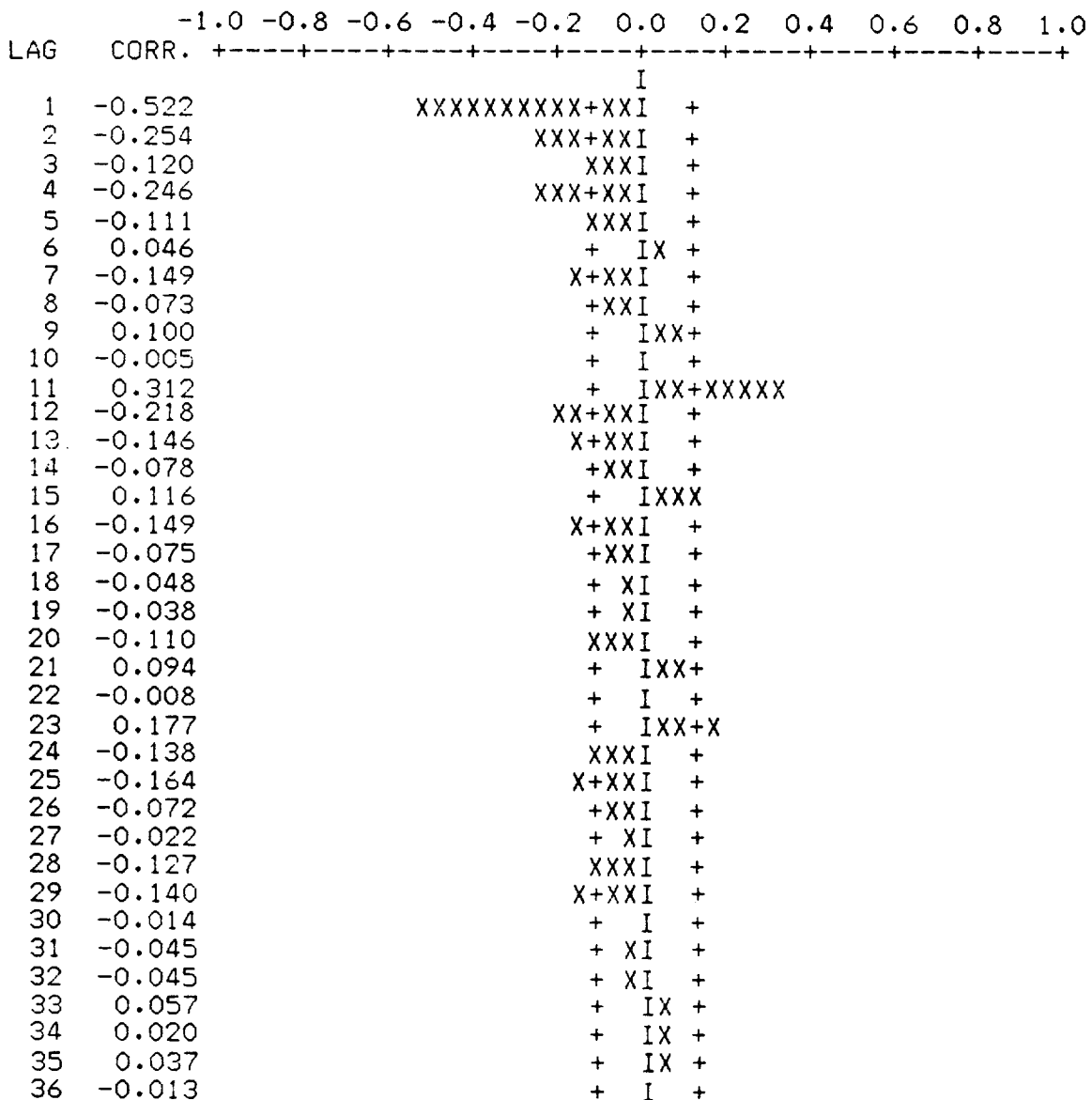


GRAFICO 8

f.a.s. residuos modelos para Log. CEE

AUTOCORRELATIONS

1- 12	-.09	.02	.02	-.13	.12	.09	-.05	.13	.13	-.02	.12	-.11
ST.E.	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07
13- 24	.04	.09	.03	-.10	.03	.03	.09	.06	.06	-.03	.05	-.10
ST.E.	.08	.08	.08	.08	.08	.08	.08	.08	.08	.08	.08	.08
25- 36	-.07	.06	-.06	.07	.03	.04	-.01	.12	-.05	0.0	0.0	-.04
ST.E.	.08	.08	.08	.08	.08	.08	.08	.08	.08	.08	.08	.08

PLOT OF AUTOCORRELATIONS

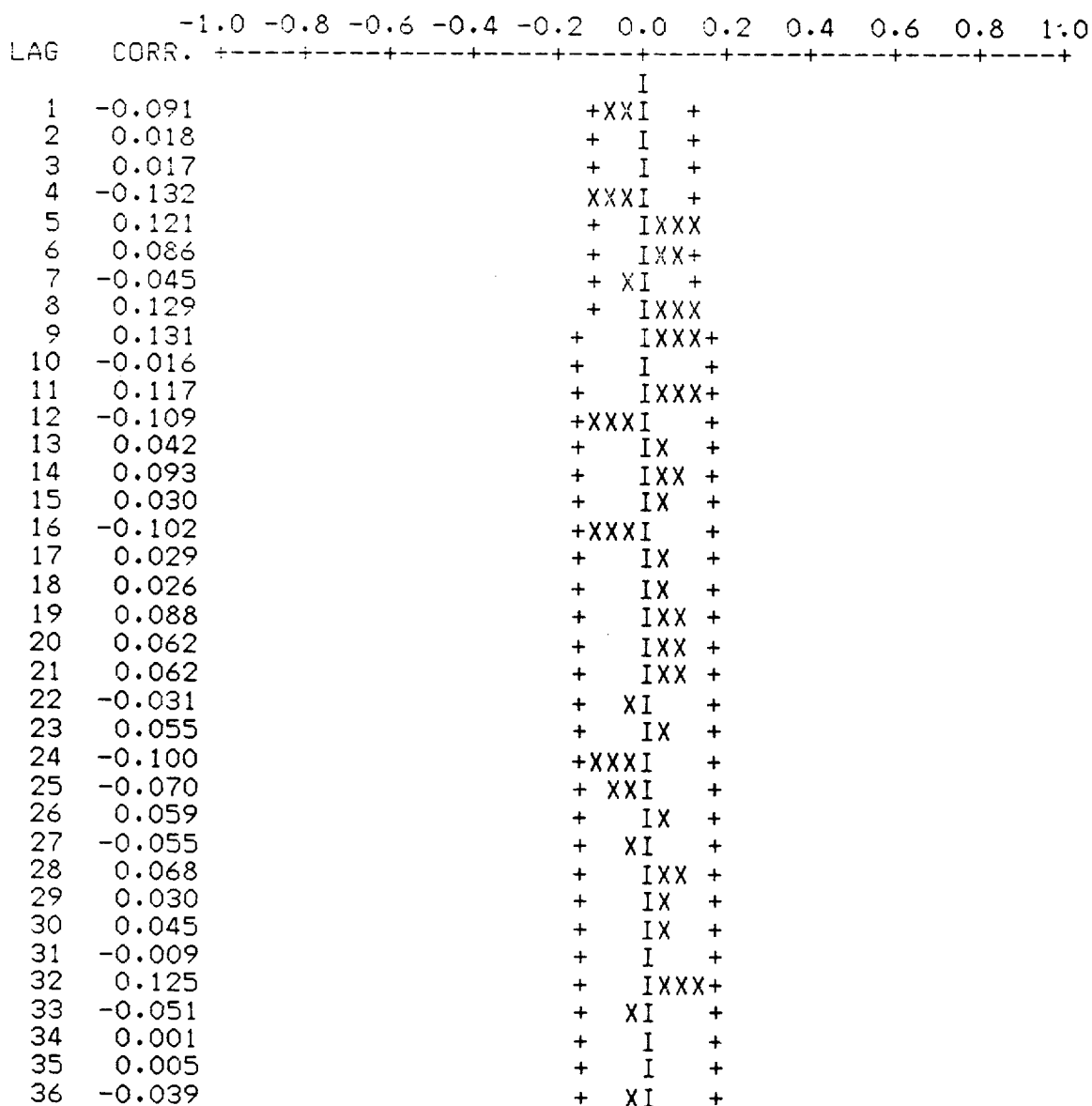


TABLA 1

SUMMARY OF THE MODEL

OUTPUT VARIABLE -- lcee
 INPUT VARIABLES -- NOISE

VARIABLE	VAR. TYPE	MEAN	TIME	DIFFERENCES
lcee	RANDOM		1- 229	(1-B ¹) (1-B ¹²)

PARAMETER	VARIABLE	TYPE	FACTOR	ORDER	ESTIMATE	ST. ERR.	T-RATIO
1	lcee	MA	1	1	0.5728	0.0545	10.51
2	lcee	MA	2	12	0.9011	0.0184	48.98

RESIDUAL SUM OF SQUARES = 0.018603
 DEGREES OF FREEDOM = 214
 RESIDUAL MEAN SQUARE = 0.000087
 (BACKCASTS EXCLUDED)

8.2. Preblanqueo y correlación cruzada

Tal como se ha indicado, si los modelos

$$\Delta A_{12} \log IPI_t = (1 - 0,615 B) (1 - 0,445 B^{12}) \hat{a}_{1t}$$

$$\Delta A_{12} \log CEE_t = (1 - 0,572 B) (1 - 0,901 B^{12}) \hat{a}_{2t}$$

son adecuados para las series en estudio, los residuos $\hat{a}_{1t}$ y $\hat{a}_{2t}$ deberían ser series aproximadamente ruido blanco. A su vez, si las series IPI y CEE están correlacionadas dinámicamente, lo mismo debería suceder con las series de residuos. Por lo tanto, la función de correlación cruzada entre $\hat{a}_{1t}$ y $\hat{a}_{2t}$ nos deberá mostrar la estructura de relación entre las series objeto de estudio.

La función de correlación cruzada (tabla 2 y gráfico 9) muestra una correlación instantánea (retardo 0) importante entre ambas variables. Por lo demás, la única correlación que se acerca a la significación es $r_{\hat{a}_{1t}\hat{a}_{2t}}(1)$; es decir, la correlación entre los residuos de log CEE y log IPI cuando la primera variable se retrasa respecto de la segunda en un período. Aunque la correlación estimada no es importante, el resultado obtenido es compatible con la hipótesis de que existe una función de transferencia de log CEE a log IPI, mientras que no hay ninguna evidencia de que exista relación en sentido inverso.

8.3. Función de transferencia

Aceptado que puede construirse un modelo del tipo

$$\log IPI_t = v(B) \log CEE_t + N_t$$

se trata ahora de identificar el orden del polinomio $v(B)$. Para ello, y siguiendo a Box y Jenkins, tal como se ha señalado, preblanqueamos la serie CEE con el modelo aceptado y filtramos la serie IPI con el mismo modelo. Esto es:

$$\Delta A_{12} \log CEE_t = (1 - 0,572 B) (1 - 0,901 B^{12}) \hat{a}_{2t}$$

$$\Delta A_{12} \log IPI_t = (1 - 0,572 B) (1 - 0,901 B^{12}) \hat{b}_{1t}$$

Dado que el modelo con el que se filtra la serie IPI no es el que mejor se ajusta a la misma, no esperamos que $\hat{b}_{1t}$ tenga un comportamiento de ruido blanco.

Sin embargo, la función de correlación cruzada entre $\hat{a}_{2t}$ y $\hat{b}_{1t}$ será proporcional a las ponderaciones del polinomio $v(B)$.

La función de correlación cruzada estimada (gráfico 10) y las ponderaciones de la función de transferencia (tabla 3) evidencian una débil rela-

GRAFICO 9

f.c. cruzada entre residuos de Log. IPI y Log. CEE

-35	-0.060	+ XI +
-34	-0.009	+ I +
-33	-0.064	+ XXI +
-32	0.064	+ IXX +
-31	-0.085	+ XXI +
-30	0.029	+ IX +
-29	0.005	+ I +
-28	0.076	+ IXX +
-27	-0.070	+ XXI +
-26	0.097	+ IXX +
-25	-0.055	+ XI +
-24	-0.152	XXXXI +
-23	0.091	+ IXX +
-22	-0.204	X+XXXI +
-21	-0.021	+ XI +
-20	0.024	+ IX +
-19	0.032	+ IX +
-18	0.026	+ IX +
-17	-0.012	+ I +
-16	-0.164	X+XXI +
-15	-0.011	+ I +
-14	0.001	+ I +
-13	0.015	+ I +
-12	-0.030	+ XI +
-11	0.098	+ IXX +
-10	-0.125	XXXI +
-9	0.002	+ I +
-8	0.015	+ I +
-7	0.042	+ IX +
-6	0.043	+ IX +
-5	0.150	+ IXX+X
-4	-0.132	XXXI +
-3	0.017	+ I +
-2	0.051	+ IX +
-1	-0.129	XXXI +
0	0.452	+ IXX+XXXXXXXX
1	-0.047	+ XI +
2	0.062	+ IXX+
3	0.037	+ IX +
4	-0.038	+ XI +
5	-0.015	+ I +
6	-0.046	+ XI +
7	0.015	+ I +
8	0.146	+ IXX+X
9	0.109	+ IXXX
10	-0.103	XXXI +
11	-0.017	+ I +
12	0.038	+ IX +
13	-0.072	+XXI +
14	0.072	+ IXX+
15	-0.031	+ XI +
16	-0.021	+ XI +
17	0.089	+ IXX+
18	0.012	+ I +
19	0.014	+ I +
20	-0.126	+XXXI +
21	-0.010	+ I +
22	-0.070	+ XXI +
23	0.105	+ IXXX+
24	-0.072	+ XXI +
25	-0.001	+ I +
26	0.077	+ IXX +
27	-0.051	+ XI +
28	-0.004	+ I +
29	-0.051	+ XI +
30	-0.053	+ XI +
31	-0.010	+ I +
32	0.118	+ IXXX+
33	-0.071	+ XXI +
34	0.028	+ IX +
35	0.037	+ IX +

GRAFICO 10

-35	0.006	+ I +
-34	0.039	+ IX +
-33	-0.088	+ XXI +
-32	0.170	+ IXXXX
-31	0.007	+ I +
-30	-0.046	+ XI +
-29	-0.068	+ XXI +
-28	0.021	+ IX +
-27	-0.033	+ XI +
-26	0.057	+ IX +
-25	0.047	+ IX +
-24	-0.077	+ XXI +
-23	0.083	+ IXX +
-22	-0.024	+ XI +
-21	-0.059	+ XI +
-20	0.025	+ IX +
-19	0.040	+ IX +
-18	-0.001	+ I +
-17	0.032	+ IX +
-16	-0.009	+ I +
-15	-0.037	+ XI +
-14	0.100	+ IXX +
-13	-0.015	+ I +
-12	-0.023	+ XI +
-11	0.041	+ IX +
-10	-0.079	+ XXI +
-9	0.046	+ IX +
-8	0.165	+ IXX + X
-7	0.028	+ IX +
-6	-0.021	+ XI +
-5	-0.014	+ I +
-4	-0.018	+ I +
-3	0.005	+ I +
-2	0.114	+ IXXX
-1	-0.015	+ I +
0	0.295	+ IXX + XXXX
1	-0.077	+ XXI +
2	0.015	+ I +
3	0.004	+ I +
4	0.036	+ IX +
5	0.104	+ IXXX
6	0.010	+ I +
7	0.038	+ IX +
8	0.014	+ I +
9	0.004	+ I +
10	-0.022	+ XI +
11	0.066	+ IXX +
12	0.097	+ IXX +
13	-0.001	+ I +
14	-0.013	+ I +
15	0.009	+ I +
16	-0.071	+ XXI +
17	0.058	+ IX +
18	0.028	+ IX +
19	0.047	+ IX +
20	0.026	+ IX +
21	-0.023	+ XI +
22	-0.130	+ XXXI +
23	0.110	+ IXXX +
24	-0.018	+ I +
25	-0.046	+ XI +
26	0.077	+ IXX +
27	-0.037	+ XI +
28	0.057	+ IX +
29	0.033	+ IX +
30	0.039	+ IX +
31	-0.031	+ XI +
32	0.065	+ IXX +
33	-0.057	+ XI +
34	-0.063	+ XXI +

TABLA 3

TRANSFER FUNCTION WEIGHTS

LAG	SCCF(X(I),Y(I+K))		SCCF(Y(I),X(I+K))	
	*SY/SX	*SX/SY	*SY/SX	*SX/SY
0	0.71708	0.12154	0.71708	0.12154
1	-0.18822	-0.03190	-0.03680	-0.00624
2	0.03750	0.00636	0.27569	0.04673
3	0.00852	0.00144	0.01279	0.00217
4	0.08834	0.01497	-0.04364	-0.00740
5	0.25228	0.04276	-0.03344	-0.00567
6	0.02409	0.00408	-0.04980	-0.00844
7	0.09275	0.01572	0.06854	0.01162
8	0.03289	0.00558	0.39978	0.06776
9	0.01090	0.00185	0.11097	0.01381
10	-0.05429	-0.00920	-0.19284	-0.03269
11	0.15946	0.02703	0.09925	0.01682
12	0.23611	0.04002	-0.05659	-0.00959
13	-0.00134	-0.00023	-0.03680	-0.00624
14	-0.03224	-0.00546	0.24171	0.04097
15	0.02269	0.00385	-0.09094	-0.01541
16	-0.17286	-0.02930	-0.02115	-0.00358
17	0.14201	0.02407	0.07809	0.01324
18	0.06808	0.01154	-0.00276	-0.00047
19	0.11340	0.01922	0.09630	0.01632
20	0.06271	0.01063	0.06092	0.01033
21	-0.05600	-0.00949	-0.14330	-0.02429
22	-0.31592	-0.05355	-0.05730	-0.00971
23	0.26676	0.04522	0.20041	0.03397
24	-0.04453	-0.00755	-0.18734	-0.03175
25	-0.11152	-0.01890	0.11469	0.01944
26	0.18811	0.03188	0.13818	0.02342
27	-0.09048	-0.01534	-0.08082	-0.01370
28	0.13872	0.02351	0.05084	0.00862
29	0.07950	0.01347	-0.16419	-0.02783
30	0.09417	0.01596	-0.11261	-0.01909
31	-0.07429	-0.01259	0.01767	0.00299
32	0.15788	0.02676	0.41331	0.07006
33	-0.13801	-0.02339	-0.21493	-0.03643
34	-0.15382	-0.02607	0.09465	0.01604
35	0.07002	0.01187	0.01543	0.00261
36	-0.03851	-0.00653	-0.15883	-0.02692

WHERE X(I) IS THE FIRST SERIES, Y(I) THE SECOND SERIES, SX THE STANDARD ERROR OF X(I), AND SY THE STANDARD ERROR OF Y(I)

TABLA 4

SUMMARY OF THE MODEL

OUTPUT VARIABLE -- *lipi*INPUT VARIABLES -- NOISE *lcee*

VARIABLE	VAR.	TYPE	MEAN	TIME	DIFFERENCES	
					1	12
<i>lipi</i>		RANDOM		1- 229	(1-B)	(1-B)
					1	12
<i>lcee</i>		RANDOM		1- 229	(1-B)	(1-B)

PARAMETER	VARIABLE	TYPE	FACTOR	ORDER	ESTIMATE	ST. ERR.	T-RATIO
1	<i>lcee</i>	UP	1	0	0.5781	0.0940	6.15
2	<i>lcee</i>	UP	1	1	-0.1294	0.0937	-1.38
RESIDUAL SUM OF SQUARES				=	0.074152		
DEGREES OF FREEDOM				=	213		
RESIDUAL MEAN SQUARE				=	0.000348		

GRAFICO 11

f.a.s. residuos modelo de función de transferencia

AUTOCORRELATIONS

1- 12	-.42	-.01	0.0	-.01	-.08	.07	.08	-.08	.10	-.03	.03	-.26
ST.E.	.07	.08	.08	.08	.08	.08	.08	.08	.08	.08	.08	.08
13- 24	.11	.09	-.07	0.0	.09	-.10	-.10	.16	-.04	-.10	.17	-.07
ST.E.	.09	.09	.09	.09	.09	.09	.09	.09	.09	.09	.09	.09
25- 36	-.07	.02	.02	-.07	.08	.03	0.0	-.04	-.03	.04	-.05	-.01
ST.E.	.09	.09	.09	.09	.09	.09	.09	.09	.09	.09	.09	.09

PLOT OF AUTOCORRELATIONS

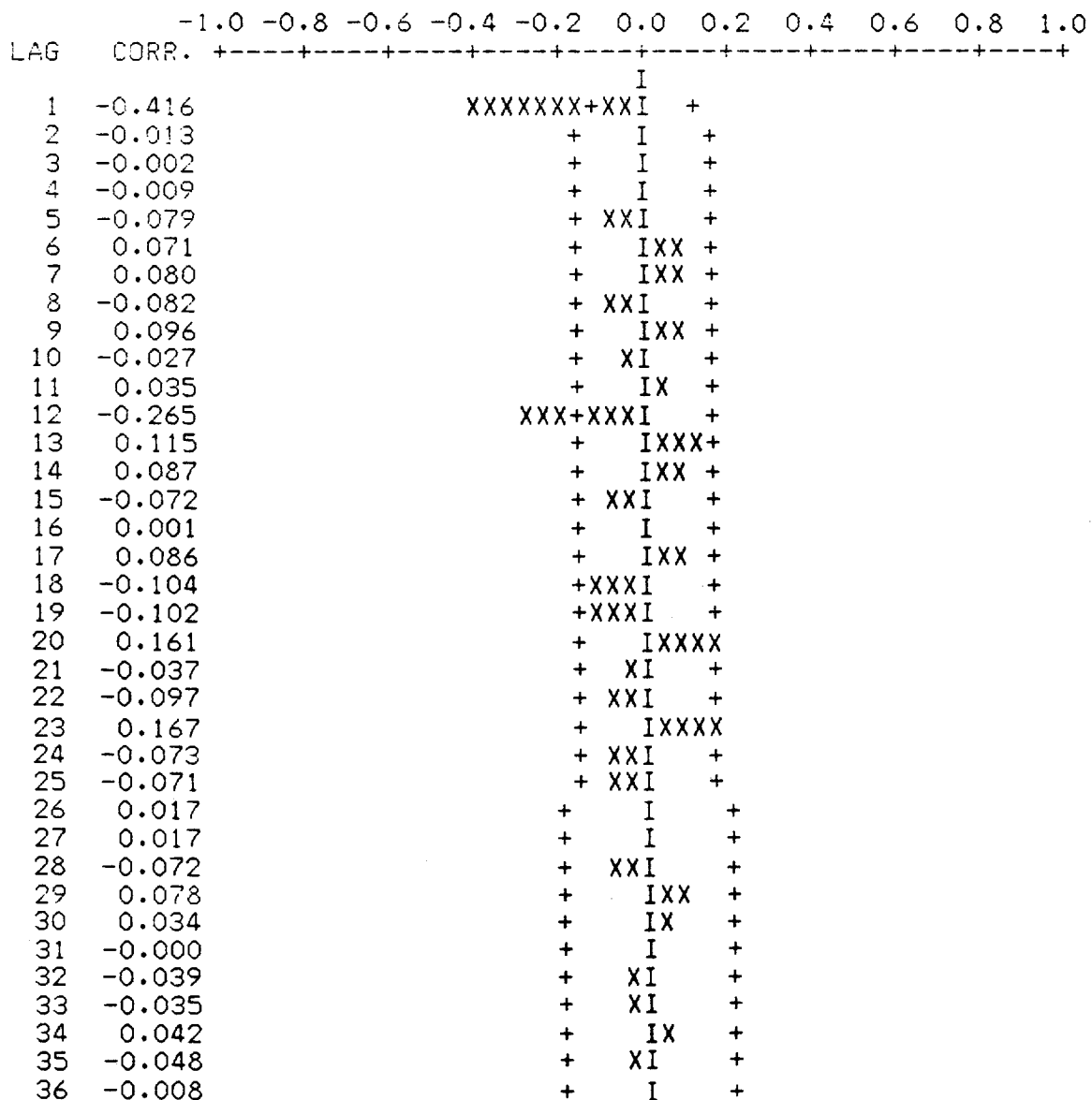


GRAFICO 12

f.a.p. residuos modelo de función de transferencia

PARTIAL AUTOCORRELATIONS

1- 12	-.42	-.22	-.13	-.09	-.16	-.06	.08	0.0	.11	.08	.13	-.23
ST.E.	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07
13- 24	-.18	-.01	-.06	-.11	.01	-.03	-.14	.01	.09	-.06	.08	-.05
ST.E.	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07
25- 36	-.10	-.06	-.09	-.16	-.04	-.02	-.02	.05	.02	-.03	.02	-.09
ST.E.	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07

PLOT OF PARTIAL AUTOCORRELATIONS

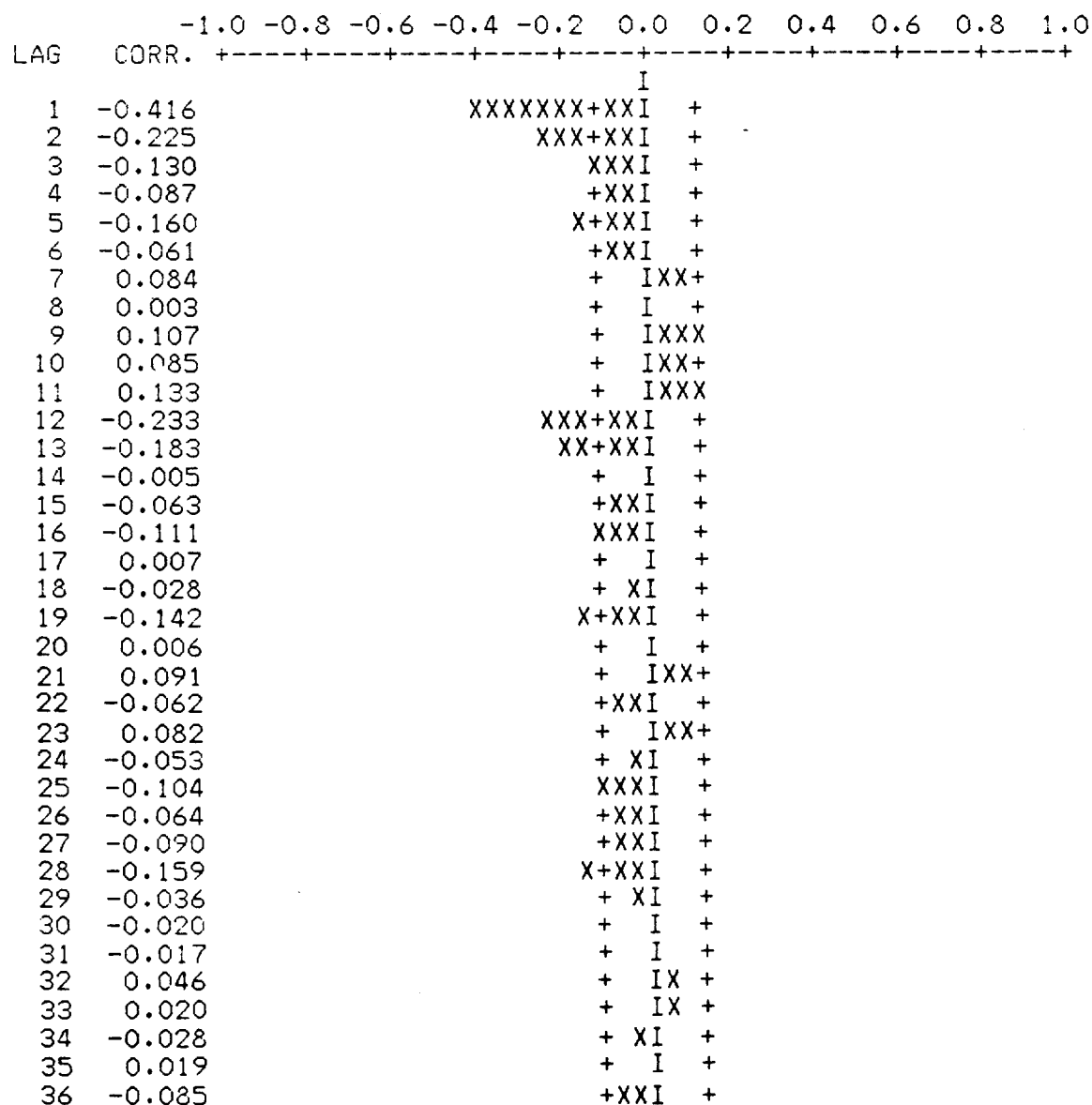


TABLA 5

SUMMARY OF THE MODEL

OUTPUT VARIABLE -- lipi
 INPUT VARIABLES -- NOISE lcee

VARIABLE	VAR.	TYPE	MEAN	TIME	DIFFERENCES	
					1	12
lipi		RANDOM		1- 229	(1-B)	(1-B)
lcee		RANDOM		1- 229	(1-B)	(1-B)

PARAMETER	VARIABLE	TYPE	FACTOR	ORDER	ESTIMATE	ST. ERR.	T-RATIO
1	lipi	MA	1	1	0.6455	0.0531	12.15
2	lipi	MA	2	12	0.4268	0.0633	6.74
3	lcee	UP	1	0	0.6764	0.0944	7.16
4	lcee	UP	1	1	-0.9453E-01	0.0944	-1.00

RESIDUAL SUM OF SQUARES	=	0.048000
DEGREES OF FREEDOM	=	211
RESIDUAL MEAN SQUARE	=	0.000227

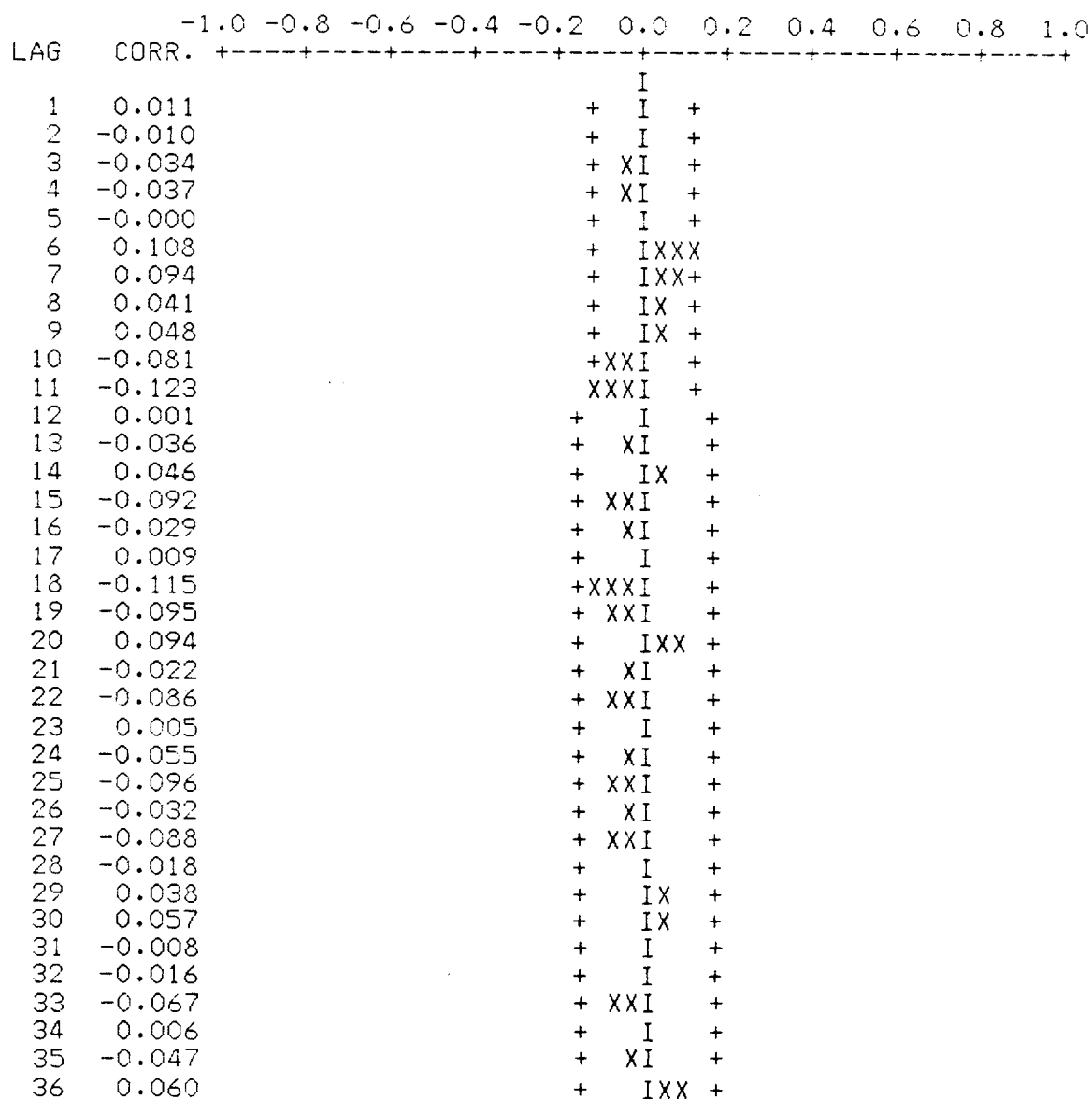
GRAFICO 13

Residuos modelo final de función de transferencia

AUTOCORRELATIONS

1- 12	.01	-.01	-.03	-.04	0.0	.11	.09	.04	.05	-.03	-.12	0.0
ST.E.	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07
13- 24	-.04	.05	-.09	-.03	.01	-.11	-.10	.09	-.02	-.09	.01	-.06
ST.E.	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07	.07
25- 36	-.10	-.03	-.09	-.02	.04	.06	-.01	-.02	-.07	.01	-.05	.06
ST.E.	.07	.08	.08	.08	.08	.08	.08	.08	.08	.08	.08	.08

PLOT OF AUTOCORRELATIONS



ANEXO I

BIBLIOGRAFIA

- (1) ANDERSON, T. W. (1971). "The statistical analysis of time series". John Wiley.
- (2) BOX y JENKINS. (1976). "Time series analysis: forecasting and control". Holden Day.
- (3) GRANGER y NEWBOLD. (1977). "Forecasting Economic time series". Academic Press.
- (4) HARVEY, A. C. (1981). "Time series models". Philip Allan.
- (5) KENDALL, M. G. (1973). "Time series". Griffin.
- (6) NERLOVE, GREYER y CARVALHO. (1979). "Analysis of Economic time series". Academic Press.
- (7) URIEL, E. (1985). "Análisis de series temporales. Modelos ARIMA". Ed. Pirámide. (Texto sencillo y sistemático para el análisis univariante).
- (8) WHEELWRIGHT y MAKRIDAKIS. "Forecasting: Methods and Applications".
- (9) X-11-ARIMA. Manual del usuario.

ANEXO II

SOFTWARE

BMDP.—Puede conseguirse a través de:

Health Science Computing Facility
University of California, Los Angeles
Los Angeles, California

MINITAB

RATS.—Puede conseguirse a través de:

TSP International
304 Junipero Serra Blvd.
Stanford, California 94305

SCA.—Puede conseguirse a través de:

Scientific Computing Associates
P.O. Box 625
Dekalb, Illinois 60115

TIMSAC.—Se trata de programas en FORTRAN,
no de un paquete:

Institute of Statistical Mathematics
6-7, 4-chome, Minami-Azabu, Minato-ku
Tokio, 106. Japón